STUDIUL MISCARII SUB ACTIUNEA UNEI FORTE CONSTANTE MASINA ATWOOD

Scopul lucrării:

În lucrare se verifică, pe cale experimentală, legile mișcării unui corp aflat sub acțiunea unei forțe constante. Aceasta este, în cazul de față, *forța de atracție gravitațională* exercitată asupra corpurilor de către Pământ. Atunci când distanțele parcurse sunt mici în raport cu raza Pământului, R_p, forța de atracție gravitațională poate fi considerată constantă:

$$F = k^g \frac{m_c m_P}{(R_P + r)^2} = k^g \frac{m_c m_P}{R_P^2 (1 + r / R_p)^2} \approx k^g \frac{m_c m_P}{R_P^2} = const. \quad (1)$$

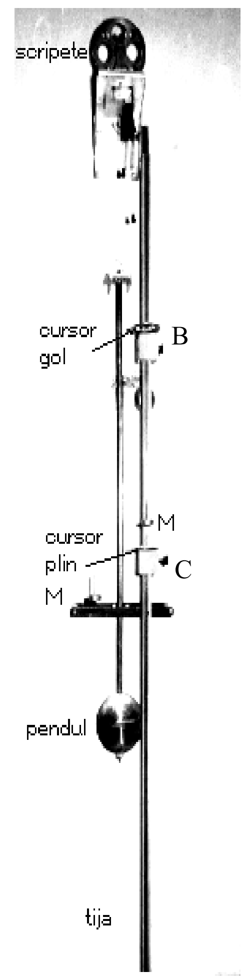

Fig. 1

Unul dintre dispozitivele cele mai cunoscute pentru studiul legilor mișcării unui sistem de corpuri sub acțiunea greutății îl constituie *mașina Atwood*. Unul dintre avantajele acestui dispozitiv este acela al măsurării, folosind un procedeu simplu, a valorii instantanee a vitezei în decursul mișcării; mașina Atwood permite, de asemenea, micșorarea până la valori convenabile, a accelerației mișcării.

Descrierea dispozitivului experimental:

Mașina Atwood (Fig. 1) se compune dintr-un scripete (notat cu S în Fig. 2A), ce se rotește în jurul unei axe fixe orizontale, O. Peste scripete trece un fir rezistent și ușor, care susține, suspendate de capetele sale, două corpuri identice, de formă cilindrică, de masă M. Unuia dintre aceste două corpuri i se pot adăuga corpuri adiționale, de masă *m*, având forma de disc cu aripioare, crestat la mijloc (Fig. 2B).

Pentru măsurarea distanțelor parcurse de sistemul mobil, precum și a viteza instantanee a acestuia, dispozitivul este prevăzut cu două platane (plasate în imediata vecinătate a unei rigle metalice): unul având un orificiu circular (Fig. 2C), care permite trecerea corpului de masă M, dar oprește masa adițională, iar celălalt - plin (Fig. 2D), care servește la oprirea corpului de masă M și, ca urmare, a întregului ansamblu.

Principiul fizic al metodei:

Având în vedere faptul că masele M ale celor două corpuri, suspendate la capetele firului sunt egale, iar frecările sunt mici, putem considera că singura forță exterioară necompensată, ce determină accelerația sistemului, considerat ca un întreg, este greutatea corpului adițional.

Pentru a scrie ecuația diferențială a mișcării sistemului, va trebui să luăm în considerare faptul că forța *mg* produce, în afară de accelerarea sistemului, a cărui masă este *2M+m,* și o mișcare de rotație accelerată a scripetelui. Deoarece, inerția scripetelui utilizat nu poate fi neglijată, vom înlocui efectul inerției scripetelui, care se manifestă în cazul *rotației* cu viteză unghiulară variabilă a acestuia, prin efectul echivalent - acela al unei mase, m_{ech}, a unui corp punctiform, aflat la periferia scripetelui. Se înlocuiește astfel efectul inerției în mișcarea de rotație (un subiect ce va fi abordat mai târziu), cu efectul inerției într-o mișcare *de translație*. Se consideră, astfel, că punctul fictiv, de masă m_{ech}, execută o mișcare de translație, odată cu ansamblul de masă *2M+m* și că el are aceeași accelerație ca și ansamblul.

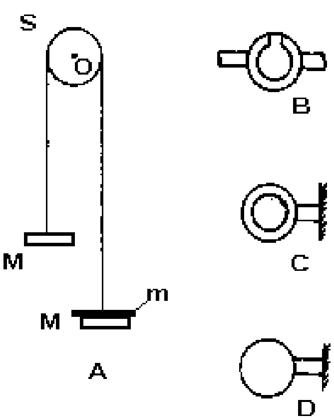

Fig. 2

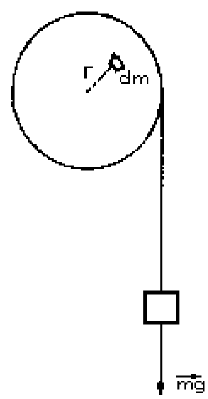

Fig. 3

În general, accelerația unghiulară, pe care o obține un corp în mișcarea de rotație, depinde de momentul forței rezultante în raport cu axa de rotație. Pentru a găsi expresia matematică a acestui moment, vom utiliza un artificiu, aplicat în general atunci când se studiază mișcarea unui corp rigid, de dimensiuni finite, cum este scripetele din experiența noastră. Vom considera scripetele ca fiind alcătuit din elemente de masă *dm* situate la diverse distanțe în raport cu axa de rotație (Fig. 3). Sub acțiunea forței *dmg*, ce acționează asupra fiecăruia din aceste elemente de masă *dm,* fiecare aceste elemente obține o accelerație liniară ce poate fi scrisă sub forma :

$$a(r) = \gamma\, r$$

unde γ este *accelerația unghiulară,* comună pentru toate elementele de masă ce alcătuiesc scripetele.

În conformitate cu principiul al II-lea al dinamicii, asupra elementului de masă *dm* va acționa o forță elementară:

$$\delta F = dm\, a(r) = \gamma\, r\, dm \qquad (2)$$

Momentul elementar determinat de această forță va fi:

$$dM = r\,\delta F = \gamma\, r^2\, dm \tag{3}$$

Momentul total, determinat de forța $F = mg$ este suma (integrala) momentelor determinate de forțele elementare. Vom putea deci scrie:

$$M = \gamma \int r^2 dm = \gamma\; I = \frac{a(R)}{R} I \tag{4}$$

unde integrala $I = \int r^2 \cdot dm$ este denumită *momentlul de inerție* al scripetelui *în raport cu axxa de rotație,* iar *a(R)* - accelerația corpului de masă m^{ech}.

Scriind momentul rezultant și sub forma:

$$M = R\,F = R\; m^{ech}\, a \tag{5}$$

din ecuațiile (4) și (5) putem scrie expresia masei echivalente a scripetelui:

$$m^{ech} = \frac{I}{R^2} \tag{6}$$

Aplicând acum principiul al II-lea al dinamicii întregului sistem, aflat în mișcare de translație accelerată, rezultă:

$$mg - F^{fr} = (2M + m + m^{ech})\cdot a \tag{7}$$

unde, *Ffr* este forța de frecare (ce se opune accelerării sistemului). În cazul în care *Ffr* este mică în raport cu forța exterioară ce acționează asupra sistemului, acesta va executa o mișcare a cărei accelerație este:

$$a = \frac{m}{2M + m + m^{ech}} \cdot g \tag{8}$$

Presupunând că accelerația gravitațională este constantă, se poate obține, prin alegerea convenabilă a celorlalte mărimi ce intervin în relația (8), valori constante și mici ale accelerației *a* în raport cu *g*.

Pentru a putea modifica valoarea accelerației, mașina Atwood este prevăzută, așa cum am arătat anterior, cu mai multe corpuri adiționale, care pot fi suprapuse peste corpul de masă M; valoarea masei acestora va determina valoarea accelerației sistemului.

Alegând un sistem de referință inerțial, având axa Oz în direcția verticală, vom putea scrie:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a = const. \tag{9}$$

După două integrări succesive rezultă:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dz}{dt} = a\,t + v_0 \\ z(t) &= \frac{a\,t^2}{2} + v_0\,t + z_0 \end{aligned} \tag{10}$$

în care s-a notat cu v_0 și z_0 viteza și, respectiv, coordonata la momentul $t=0$.

În lucrare se vor verifica legea vitezei (10.1) și spațiului (10.2), adică (având în vedere că $v_0=0$ și $z_0=0$) legile exprimate prin ecuațiile:

$$\begin{aligned} v &= a\,t \\ z &= \frac{1}{2}a\,t^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Această verificare va fi făcută: a) *pe cale analitică* (verificând - în primul caz - că raportul *v/t* este constant, pentru diverse valori ale timpului de mișcare, iar în al doilea caz - că raportul z/t^2 este constant), b) *pe cale grafică* și c) folosind *metoda celor mai mici pătrate.* În toate cele trei cazuri se va determina, de asemenea, și valoarea accelerației mișcării și se vor compara rezultatele, obținute folosind cele trei metode.

Procedeul experimental

Pentru a verifica legea vitezei se parcurg următoarele etape:

❶ se pune în mișcare pendulul;

❷ se fixează platanul inelar, succesiv în acele poziții, pentru care distanța de la punctul de pornire (A) la platanul inelar (B) (Fig. 1) este parcursă în 1, 2, 3... secunde;

❸ se poziționează platanul plin, asfel încât distanța dintre cele două platane să fie parcursă întotdeauna într-o secundă (în felul acesta spațiul parcurs între cele două cursoare este *numeric* egal cu valoarea vitezei instantanee, atinsă la sfârșitul mișcării uniform accelerate;

❹ se măsoară spațiul parcurs de sistem în mișcarea rectilinie și uniformă între punctele B și C;

❺ se întocmește Tabelul 1;

❻ se efectuează calculul erorilor;

❼ se trasează graficul *v=v(t)* și se determină (din panta graficului) accelerația sistemului;

❽ se determină accelerația sistemului, folosind metoda celor mai mici patrate;

❿ se compară rezultatele între ele, indicând un clasament al preciziei ce poate fi atinsă în fiecare din cele trei cazuri.

Pentru a verifica legea spațiului se parcurg următoarele etape:

❶ se pune în mișcare pendulul;

❷se fixează platanul plin în pozițiile corespunzătoare parcurgerii distanțelor AB în intervalele de 1, 2, 3, 4 secunde;

❸se măsoară distanțele corespunzătoare;

Tabelul 1

Verificarea legii vitezei în mișcarea uniform accelerată

v(t) (cm/s)	*exp 1*	*exp 2*	...	*exp 10*	$v = v_m \pm \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\Delta v_i$
v(t=1)					
v(t=2)					
v(t=3)					

❹se repetă măsurătorile pentru completarea Tabelului 2;

❺se efectuează calculul erorilor;

❻se trasează graficul $z=z(t^2)$ și se determină accelerația sistemului;

❼ se calculează accelerația mișcării folosind metoda celor mai mici pătrate;

Tabelul 2

Verificarea legii spațiului în mișcarea uniform accelerată

z(t) (cm)	*exp 1*	*exp 2*	...	*exp n*	$z = z_m \pm \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\Delta z_{im}$
z(t=1)					
z(t=2)					
...					

Analiza erorilor de măsură.

Erorile de măsură ce apar în timpul experimentului se datorează erorilor de măsurare a *timpului și a spațiului parcurs.* Durata mișcării se măsoară cu ajutorul unui pendul care bate secunda. Erorile la măsurarea duratei apar la aprecierea momentului pornirii, respectiv opririi corpului. Erorile legate de măsurarea spațiului parcurs apar la stabilirea poziției platanelor.

Pentru aprecierea erorilor folosim, așa cum a fost prezentat în Introducere, *metoda diferențialei logaritmice*. Eroarea relativă ce intervine la determinarea vitezei, respectiv a spațiului este $\Delta v/v_m$, respectiv $\Delta z/z_m$, unde Δv și Δz sunt erorile absolute, corespunzătoare acestor mărimi. Ele sunt determinate de gradația instrumentului și se consideră egale cu jumătate din mărimea celei mai mici diviziuni.

Din legea vitezei $v = at$ rezultă:

$$\ln a = \ln v - \ln t \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = \frac{dv}{v} - \frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta a}{a} \leq \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta t}{t} \qquad (12)$$

Din legea spațiului, $z = 1/2\ at^2$ vom avea:

$$\ln a = \ln 2 + \ln z - 2\ln t \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = \frac{dz}{z} - 2\frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \frac{\Delta a}{a} \leq \frac{\Delta z}{z} + 2\frac{\Delta t}{t} \qquad (13)$$

De exemplu, apreciind că momentul opririi și pornirii corpului se face cu o eroare de 0,1 s se obține, din legea spațiului, de exemplu pentru t = 2s, o eroare relativă $\Delta t / t = 2 \cdot 0,1 / 2 = 0,1 = 10\%$. Pentru ca eroarea relativă ce apare la măsurarea spațiului să nu depășească această valoare, va trebui să determinăm poziția platanului plin cu o precizie $\Delta z / z = 2\Delta t / t = 20\%$.

Dacă, de exemplu, z = 20 cm, atunci poziția platanului trebuie citită cu o precizie Δz = 0,4 cm. Așadar, citirea distanțelor în milimetri ar fi inutilă în acest caz, având în vedere precizia cu care se determină timpul.