

Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare. Determinarea vitezei sunetului folosind figurile Lissajou

21 februarie 2009

1 Scurtă teorie

Să analizăm ce se întâmplă dacă, în mecanică, un punct material este supus acțiunii a *două* forțe de tip elastic ce determină apariția a *două* oscilații armonice efectuate pe direcții perpendiculare. Ecuațiile parametrice ale celor două mișcări vor fi:

$$x = A \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad (1)$$

$$y = B \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \quad (2)$$

Să considerăm, pentru început, că aceste oscilații au aceeași frecvență ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) și să luăm ca referință faza oscilației care se execută după axa Ox , deci $\varphi_1 = 0$. În aceste condiții, faza oscilației care de-a lungul axei Oy se va scrie ca fiind $\varphi_2 = \Delta\varphi$.

Folosind relațiile trigonometrice:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad (3)$$

și

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad (4)$$

după eliminarea timpului din ecuațiile parametrice ale mișcării, se găsește:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi \quad (5)$$

Ecuația (5) reprezintă *ecuația traiectoriei oscilatorului bi-dimensional*. Reprezentarea grafică a acestei ecuații este o elipsă care are axele de simetrie înclinate față de direcțiile celor două axe de coordonate.

În funcție de valoarea defazajului $\Delta\varphi$, se pot întâlni următoarele situații:

- 1. $\Delta\varphi = 0$, sau $\Delta\varphi = \pi$; elipsa degenerează într-o dreaptă:

$$y = \pm \frac{B}{A} x \quad (6)$$

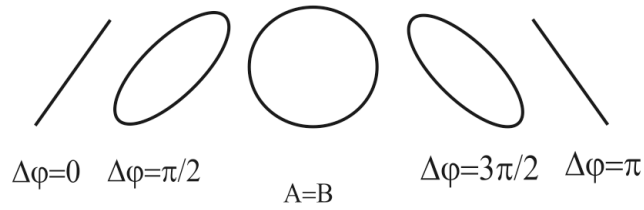


Figura 1: Traectoria punctului material ce execută simultan două oscilații perpendiculare, de aceeași frecvență, defazate cu un unghi $\Delta\varphi$ cuprins între 0 și 2π .

- 2. $\Delta\varphi=\pi/2$ sau $3\pi/2$, traiectoria este o elipsă având axele de simetrie pe Ox și Oy :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (7)$$

Dacă, în plus $A = B$, atunci elipsa devine un cerc. Aceste situații sunt reprezentate în Fig.1. În multe situații întâlnite în practică, inclusiv în lucrarea de față, compunerea oscilațiilor perpendiculare se folosește ca metodă de determinare a defazajului.

Dacă frecvențele oscilațiilor care se compun sunt diferite, traiectoriile obținute au o formă complicată, în funcție de raportul frecvențelor și de

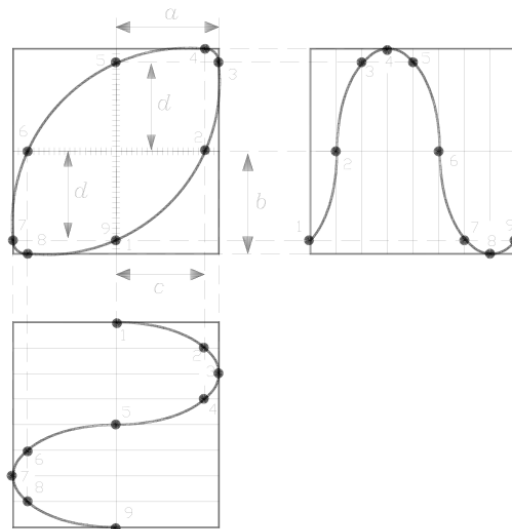


Figura 2: O figură Lissajou, rezultată din compunerea a două oscilații perpendiculare, defazate cu un unghi cuprins între 0 și $\pi/2$

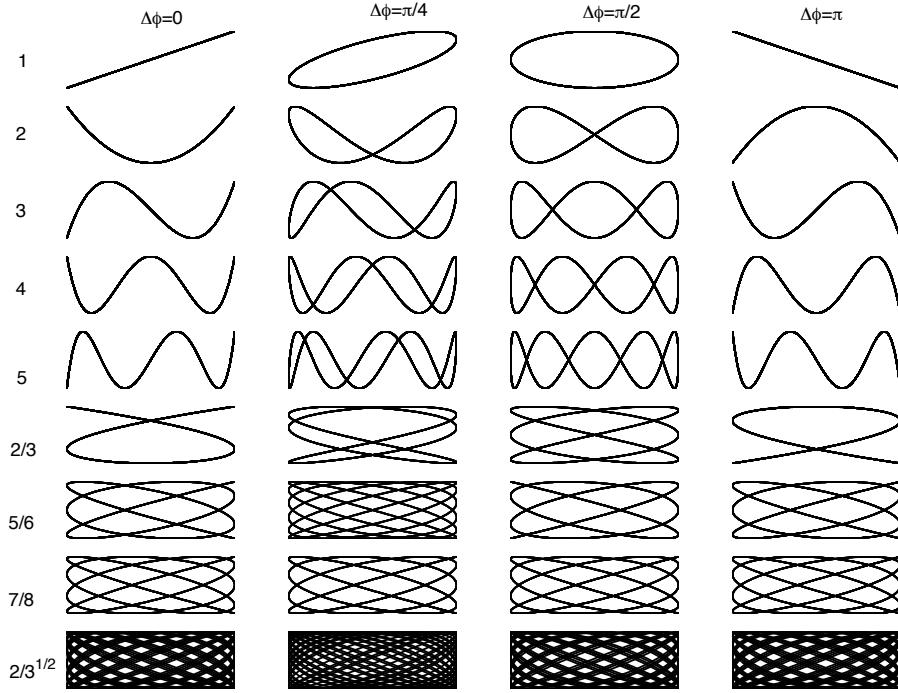


Figura 3: Figuri Lissajou obținute în cazul compunerii oscilațiilor perpendiculare având pulsații ω_x și ω_y exprimabile ca rapoarte de numere întregi. Pe coloane sunt reprezentate figuri Lissajou corespunzătoare unor diferențe de fază cuprinse între 0 și π .

diferența de fază. Dacă raportul frecvențelor nu este un număr rațional, curba - traiectorie acoperă treptat întreaga arie (vezi Fig.3).

De menționat că discuția anterioară este valabilă nu doar pentru compunerea oscilațiilor mecanice, ci și a celor electrice. Așa, de exemplu, dacă vom aplica la intrările X și Y ale unui osciloscop catodic două tensiuni alternative descrise de ecuațiile:

$$u_x = U_x \sin \omega t \quad (8)$$

$$u_y = U_y \cos(\omega t \pm \Delta\varphi), \quad (9)$$

din compunerea acestor două oscilații va rezulta o mișcare după o traiectorie eliptică (Fig.2), vizibilă pe ecranul osciloscopului. Valoarea instantanee a elongației oscilației reprezentate pe direcție orizontală devine zero $x = 0$ atunci când:

$$\omega t_n = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Valorile instantanee ale lui u_y , la aceste momente t_n , sunt:

$$u_y = b \sin(n\pi \pm \Delta\varphi) = \pm b \sin \Delta\varphi \quad (11)$$

Coordonatele corespunzătoare sunt date de ecuația:

$$y(x=0) = \pm d \quad (12)$$

Identificând (11) cu (12), rezultă:

$$\Delta\varphi = \frac{d}{b} \quad (13)$$

Un raționament analog conduce la rezultatul:

$$\Delta\varphi = \frac{c}{a} \quad (14)$$

dacă se consideră că defazaajul este inclus în oscilația orizontală.

2 Partea experimentală

Posibilitatea de a măsura defazaajul dintre două semnale cu ajutorul unui osciloscop catodic ne permite să măsurăm cu ușurință viteza sunetului în aer. Într-adevăr, dacă la intrarea X (canalul I) al osciloscopului vom aplica aceeași tensiune, ca și cea aplicată unui difuzor (alimentat de la un generator de tensiune alternativă și jucând rol de sursă de sunet), iar la intrarea Y (canalul II) - tensiunea culeasă de un microfon (cu rol de receptor de sunet), defazaajul măsurat prin procedeul descris în secțiunea anterioară ne permite să determinăm viteza de propagare a sunetului în aer. Aranjamentul experimental este prezentat în Fig. 4.

Un generator de semnal de tip Leybold Didactic, G, permite alimentarea difuzorului D cu o tensiune alternativă variabilă, U_x , a cărei frecvență și amplitudine pot fi reglate după dorință. Aceeași tensiune se aplică (și) la intrarea X a osciloscopului (HAMEG[®]). Tensiunea U_y , proporțională cu semnalul acustic cules din aer de microfonul M, se aplică la intrarea Y a osciloscopului. Sensibilitatea corespunzătoare celor două intrări ale osciloscopului se poate regla, pentru a obține o imagine de dimensiuni cât mai mari, care să acopere cât mai mult din suprafața ecranului. Ansamblul microfon-difuzor se montează pe o șină orizontală, iar distanța dintre ele se măsoară cu o riglă gradată în milimetri.

Între întârzierea de fază, măsurată în conformitate cu procedura discutată anterior (și ilustrată în Fig. 2) și timpul Δt necesar propagării (cu viteza constantă, c) a sunetului între difuzor și microfon, se poate scrie relația:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\pi\nu\Delta t \quad (15)$$

Distanța Δx dintre difuzor și microfon va fi parcursă în intervalul de timp $\Delta t = \Delta x/c$, iar, conform ecuației (15):

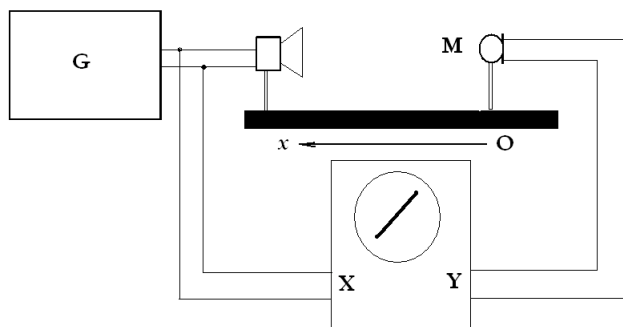


Figura 4: Schema instalației experimentale.

$$\Delta\varphi = 2\pi\nu\Delta x/c \quad (16)$$

Ținând cont și de ecuația (13), rezultă că:

$$c = 2\pi\nu\Delta x/\Delta\varphi = 2\pi\nu\Delta x b/d \quad (17)$$

Evident, pentru determinarea vitezei sunetului în aer, este nevoie să măsurăm distanțele Δx , b și d .

Deoarece sursa de sunet și microfonul nu pot fi approximate prin puncte materiale, distanța Δx este – practic – foarte dificil de măsurat. Având, însă, în vedere că, în urma parcurgerii de către sunet a unei distanță egală cu lungimea de undă, λ , unda suferă o întârziere de fază (defazaj)¹ de 2π radiani¹, putem folosi ecuația precedentă pentru cazul particular $\Delta x = \lambda$. Valoarea lui λ reprezintă distanța pe care deplasăm microfonul pentru a obține pe ecran două treceri succesive prin "faza" de dreaptă în cadranele I și III, ori II și IV (vezi Fig. 1)².

Cum o undă sonoră parcurge o distanța λ în timpul $\Delta t = T$, determinarea vitezei sunetului se rezumă la aplicarea formulei:

$$c = \lambda/T = \lambda\nu \quad (18)$$

3 Indicații de lucru

1. Pentru creșterea exactității de determinare a lungimii de undă, este indicat să trasăm graficul dependenței poziției microfonului în funcție de numărul de lungimi de undă identificate așa cum am arătat mai sus, $x = f(N)$. Valoarea lui λ să o deducem din panta acestei dependențe.

¹Cu alte cuvinte, se parcurge dus-întors succesiunea de situații reprezentate în Fig. 1.

²Aceasta reprezintă cazul particular în care $b = 0$, situație care poate fi identificată experimental în condiții de maximă precizie.

2. Într-o serie separată de experimente, se va monitoriza variația amplitudinii semnalului cules de microfon, în funcție de distanța x dintre acesta și difuzor. Se va urmări, cu rezultatele acestor măsurători, identificarea tipului de dependență (se recomandă utilizarea programelor ORIGIN[®] sau LoggerPro[®] pentru fitarea rezultatelor cu o funcție polinomială).

3. Prin folosirea unei surse de căldură (becul unei veioze sau o altă sursă de aer cald) se va urmări creșterea temperaturii aerului în zona dintre difuzor și microfon, precum efectul acesteia asupra vitezei a sunetului. Temperatura aerului se va măsura cu un termocuplu.

Se cunoaște că, în ipoteza gazului ideal, viteza unei unde longitudinale este dată de relația:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \quad (19)$$

4. Se va compara valoarea determinată a vitezei sunetului cu aceea rezultată din ecuația (19). Se vor căuta sursele care ar putea conduce la diferențe între rezultate.

5. Pentru temperaturi puțin diferite de cea a camerei, o relație aproximativă a lui c se poate scrie sub forma:

$$c = 331.45 + 0.61\vartheta \quad (20)$$

unde ϑ este temperatura camerei, exprimată în scara Celsius, iar viteza – în m/s. Propuneți un procedeu de măsurarea a temperaturii, în conformitate cu fenomenele discutate mai sus și comparați valorile temperaturii aerului deduse din relația anterioară cu cele indicate de termocuplu.