STUDIUL MISCARII DE ROTATIE A SOLIDULUI RIGID. ELIPSOIDUL DE INERTIE. AXE PERMANENTE DE ROTATIE

Scopul lucrării

În lucrarea de față se vor determina momentele de inerție principale centrale I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} față de axele de simetrie ale unui corp de formă paralelipipedică şi se vor compara aceste valori cu cel obținute prin calcul. De asemenea, determinând momentul de inerție în raport cu axa ce coincide cu diagonala de volum a paralelipipedului, se va putea verifica ecuația elisoidului de inerție.

Considerații teoretice

Ecuația diferențială a mişcării de rotație a solidului rigid, $\vec{M} = d\vec{J}/dt$ (unde $\vec{M}$ este momentul total al forțelor externe, iar $\vec{J}$ - momentul cinetic al rigidului) conține o mărime tensorială $\vec{\vec{I}}$, definită prin relația $\vec{J} = \vec{\vec{I}}\,\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}$ este viteza unghiulară), care depinde de orientarea axei instantanee de rotație în raport cu corpul, fiind, deci, o funcție de timp. Ataşând corpului rigid un sistem de coordonate, SC, legat de acesta, se pot calcula momentele de inerție în raport cu axele SC (care sunt, de data aceasta, independente de timp), iar valoarea momentului de inerție în raport cu orice axă de rotație se poate exprima în funcție de momentele de inerție corespunzătoare rotației în jurul axelor SC.

Ecuația care exprimă legătura dintre momentele de inerție sus-menționate este aceea a unui elipsoid de revoluție, denumit ***elipsoid de inerție***. Cunoaşterea ecuației elipsoidului de inerție permite alegerea unei astfel de orientări a SC, astfel încât rotația să aibă un caracter stabil, adică corpul să prezinte tendința de revenire la situația inițială, în urma aplicării unei perturbații externe. Aceasta înseamnă, cu alte cuvinte, găsirea acelei orientări a SC, în raport cu care ecuația elipsoidului de inerție ia aşa-numita ***formă canonică***.

Dacă corpul rigid se roteşte în jurul unei axe care nu trece prin centrul său de masă, atunci păstrarea orientării acestei axe (denumită ***axă permanentă)*** impune anularea (de către legături) a rezultantei forțelor centrifuge. Rolul legăturii îl au în practică lagărele de fixare a axei de rotație. Dacă axa de rotație trece prin centrul de masă al rigidului, ea se numeşte centrală şi constituie o ***axă liberă***. Cunoaşterea axelor libere de rotație este deosebit de imporantă în tehnică, pentru echilibrarea roților, rotoarelor de turbine, elicelor, etc.

Să considerăm un element de masă ***dm*** a rigidului (Fig. 1), care execută o

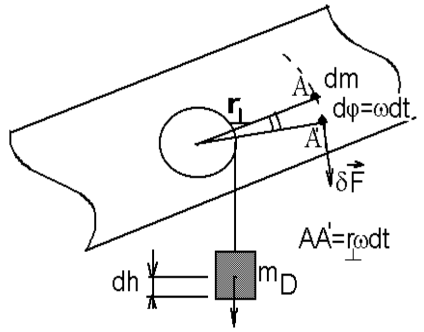

Fig. 1

mişcare de rotație pe o traiectorie circulară de rază $r_{\perp}$ în jurul axei orizontale. Vom nota cu $\boldsymbol{a}_{\text{tg}}$ accelerația acestui element de masă, determinată de forța elementară $\boldsymbol{\delta F}$ ($\boldsymbol{\delta F}$ este forța ce revine acestui element de masă ***dm*** din forța totală ce pune în mişcare întregul sistem); expresia accelerației rezultă aplicând principiului II al dinamicii:

$$\delta \vec{F} = dm \cdot \vec{a}_{tg} = dm \cdot \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} = dm \cdot \frac{d}{dt}(\omega \cdot r_{\perp})\hat{e}_{tg} = dm \cdot r_{\perp} \frac{d\omega}{dt} \hat{e}_{tg} \tag{1}$$

Deoarece direcțiile forțelor ce acționează asupra tuturor elementelor de masă din structura corpului A sunt diferite, este dificil să se facă o însumare a lor, pentru a găsi unei ecuația diferențială a mişcării de rotație a sistemului. Dacă, însă, se evaluează ***momentele elementare*** ale forțelor (care sunt toate paralele între ele) sau ***lucrul mecanic*** produs de acestea (lucrul mecanic fiind o mărime scalară), se poate propune un model teoretic, care să explice mişcarea şi să permită calcularea diferitelor mărimi fizice de interes. Vom aplica, în continuare, această ultimă variantă de abordare a problemei.

Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a corpului *D* determină variația energiei cinetice a aceluiaşi corp, precum şi a ansamblului aflat în rotație. Având în vedere că toate elementele de masă au aceeaşi viteză unghiulară şi luând în considerare că o parte din acest lucru mecanic se cheltuie pentru învingerea frecărilor inerente în practică (se produce căldură), se poate scrie, pentru o deplasare elementară, o ecuație de bilanț energetic de forma:

$$m_D g \cdot dh = \omega \cdot d\omega \int_V r_{\perp}^2 dm + \int_V v \cdot dv \cdot dm + dQ \tag{2}$$

Notând cu ***h*** lungimea firului înfăşurat pe ***C*** şi avînd în vedere că viteza liniară a lui ***D*** variază între *0* şi ***v***, iar viteza unghiulară - între *0* şi ω, prin integrare se obține ecuația:

$$m_D gh = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + Q \tag{3}$$

unde $I = I_A + I_1$ este *momentul de inerție* al ansamblului corp-cadru-cilindru, iar I_1 - momentul ansamblului cadru - cilindru.

Vom deduce în continuare expresia momentului de inerție $\boldsymbol{I}_A$ ($\boldsymbol{I}_1$ rămâne constant în timpul experimentului). Dacă atașăm corpului un sistem de coordonate ***SC***, ale cărui axe sunt orientate arbitrar în raport cu corpul (Fig. 2), direcția axei de rotație (direcția lui $\hat{\omega}$) face cu axele SC unghiurile φ_x , φ_y , φ_Z . Raza de rotație a elementului ***dm***, are expresia:

$$r_\perp^2 = r^2 - (r\cos\varphi)^2 = r^2 - (\vec{r}\cdot\hat{\omega})^2 \tag{4}$$

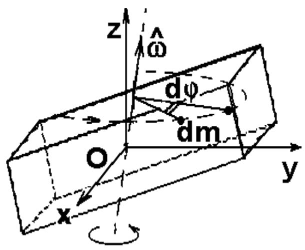

Fig. 2

Momentul de inerție ***I*** în raport cu axa dată va fi:

$$I = \int_V r_\perp^2 dm = \int_V [r^2 - (\vec{r}\hat{\omega})^2] dm \tag{5}$$

Înlocuind aici:

$$\hat{\omega} = \cos\varphi_x \hat{x} + \cos\varphi_y \hat{y} + \cos\varphi_z \hat{z} \quad \text{şi } \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

vom găsi, după efectuarea unor calcule simple:

$$I = I_{xx}\cos^2\varphi_x + I_{yy}\cos^2\varphi_y + I_{zz}\cos^2\varphi_z + 2I_{xy}\cos\varphi_x\cos\varphi_y + 2I_{xz}\cos\varphi_x\cos\varphi_z + 2I_{yz}\cos\varphi_y\cos\varphi_z$$

în care am notat cu:

$$I_{xx} = \int_V (r^2 - x^2) dm \ ; \quad I_{yy} = \int_V (r^2 - y^2) dm \ ; \quad I_{zz} = \int_V (r^2 - z^2) dm \tag{6}$$

momentele de inerție în raport cu axele ***Ox***, ***Oy*** și ***Oz*** ale ***SC***, iar cu:

$$I_{xy} = -\int_V xy\, dm \ ; \ I_{yz} = -\int_V yz\, dm \ ; \quad I_{yz} = -\int_V yz\, dm \tag{7}$$

momentele centrifugale. Dacă se alege orientarea axelor ***SC***, astfel încât:

$$X = \frac{\cos\varphi_x}{\sqrt{I}} \qquad Y = \frac{\cos\varphi_y}{\sqrt{I}} \qquad Z = \frac{\cos\varphi_z}{\sqrt{I}} \tag{8}$$

expresia lui ***I*** devine:

$$I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 + 2I_{xy}XY + 2I_{xz}XZ + 2I_{yz}YZ = 1 \quad (9)$$

Relația (9) reprezintă ecuația unui elipsoid de revoluție, de aceea se numeşte ***ecuația elipsoidului de inerție.*** Dacă se alege originea SC în centrul de masă, iar axele acestuia sunt paralele cu axele de simetrie ale corpului, momentele centrifugale de inerție se anulează (în acest caz elementele de masă sunt distribuite simetric în raport cu axa de rotație).

Alegând succesiv direcția axei de rotație, astfel încât ea să fie, pe rând, paralelă cu cele trei muchii reciproc perpendiculare ale paralelipipedului ***A***, vom putea, mai întâi, calcula momentele de inerție I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, după care putem verifica ecuația:

$$I = I_{xx}\cos^2\varphi_x + I_{yy}\cos^2\varphi_y + I_{zz}\cos\ \varphi_z \quad (10)$$

pentru direcția diagonalei de volum a paralelipipedului, pentru care avem valorile cosinuşilor directori:

$$\cos\varphi_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \cos\varphi_x = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \cos\varphi_z = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (11)$$

(am notat cu *a, b,* şi *c* laturile paralelipipedului).

Fixând corpul astfel încât axa de rotație să treacă prin ***CM*** şi să fie paralelă cu una din muchiile acestuia (pe care o putem nota convențional cu ***Ox***), ecuația (3) devine:

$$m_D gh = \frac{\omega^2}{2}(I_{xx} + I_1) + \frac{m_D v^2}{2} + Q \quad (12)$$

Scoțând acum corpul paralelipipedic şi lăsând din nou corpul ***D*** să cadă pe distanța h:

$$m_D gh = \frac{\omega_1^2}{2}I_1 + \frac{m_D v_1^2}{2} + Q_1 \quad (13)$$

putem, folosind ecuațiile (12) şi (13) să calculăm pe I_{XX}. Având în vedere că mişcarea corpului D este uniform accelerată, $v = 2h/t$, iar $\omega = v/R$ (***R*** este raza cilindrului ***C***) şi admițând că $Q_1 = Q$, vom găsi:

$$I_{xx} = k(t_x^2 - t_1^2) \quad (14)$$

unde:

$$k = \frac{R^2}{2h^2}(m_D gh - Q) \quad (15)$$

Cu t_X şi t_1 s-au notat timpii de cădere a corpului ***D*** pe distanța ***h*** în prezența, respectiv în absența corpului ***A***.

Repetând experimentul pentru direcțiile y şi z, vom obține ecuații similare relației (14) pentru I_{yy}, I_{ZZ}. Se fixează apoi corpul, astfel încât diagonala sa mare să constituie axa da rotație; se măsoară şi în acest caz timpul de cădere, ***t***. Înlocuind expresiile lui I_{XX}, I_{yy} şi I_{ZZ} în (10) rezultă:

$$t^2 = \frac{a^2 t_x^2 + b^2 t_y^2 + c^2 t_z^2}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (16)$$

De asemenea, se vor verifica valorile momentelor de inerție I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} găsite

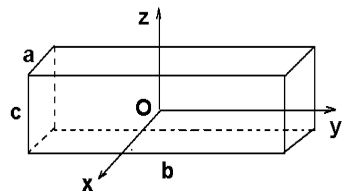

Fig. 3

folosind ecuații de tip (14) (în care $\boldsymbol{Q} \cong 0$) cu valorile acelorași mărimi, determinate prin calcul. Calculul acestora (vom lua ca exemplu calculul lui $\boldsymbol{I}_{xx}$) se face astfel (vezi Fig. 4):

$$I_{xx} = \int (r^2 - x^2)dm = \rho \int (y^2 + z^2)dx\,dy\,dz = \rho \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-c/2}^{c/2} dz + \rho \int_{-c/2}^{c/2} z^2 dz \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy =$$

$$= \frac{\rho abc}{12}(b^2 + c^2) = \frac{m}{12}(b^2 + c^2) \qquad (17)$$

Instalația experimentală.

Schema instalației de lucru este prezentată în Fig. 4. Se folosește, în calitate de rigid, un corp metallic paralelipipedic, A, ce poate fi montat în mai multe moduri într-un cadru metalic, B, ansamblul putându-se roti în jurul une axe fixe, orizontale. Mişcarea de rotație a întregului ansamblu se produce lăsând să se desfăşoare un fir ce susține un corp $\boldsymbol{D}$, fir ce fusese înfăşurat pe cilindrul $\boldsymbol{C}$, solidar cu axul.

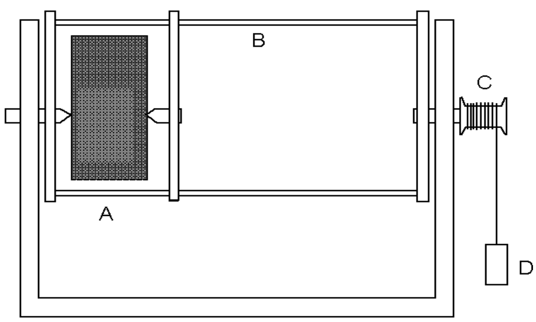

Fig. 4

Modul de lucru

❶Se măsoară masele corpurilor cu care se lucrează;

❷Se măsoară lungimea ***h*** a firului care este înfăşurat pe cilindrul ***C,*** precum şi dimensiunile ***a, b, c*** ale corpului ***A*** ;

❸Se măsoară timpul de cădere al corpului ***C*** cu cadrul gol, t_1, (fără corpul ***A***);

❹Se fixează corpul ***A***, astfel încât să se rotească în jurul axei ***Ox*** şi se determină t_x; se repetă experimentul de 10 ori;

❺Se repetă operaţiile de la punctul 4, pentru a determina duratele t_y şi t_z

❻Se fixează corpul ***A***, astfel încât să se rotească în jurul diagonalei de volum şi se determină ***t***; se repetă experimentul de 10 ori;

❼Se completează tabelul de date experimentale.

Tabelul 1

Determinarea momentelor de inerţie

Nr. det.	t_1 (s)	t_x (s)	t_y (s)	t_z (s)	**t** (s)	I_{xx} (kg m^2)	I_{yy} (kg m^2)	I_{zz} (kg m^2)	**I** (kgm^2)
1									
...									
10									

❽Se efectuează calculul erorilor.

Analiza erorilor de măsură

Evaluarea erorilor de măsură a momentelor de inerţie (de exemplu I_{xx}) se face folosind ecuaţia:

$$I_{xx} = \frac{m_D R^2 g}{2h}(t_x^2 - t_1^2) \tag{18}$$

Aplicând metoda diferenţialei logaritmice vom găsi în final:

$$\frac{\Delta I_x}{I_x} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{2t_x \Delta t_x}{t_x^2 - t_1^2} + \frac{2t_1 \Delta t_1}{t_x^2 - t_1^2} \tag{19}$$

Se va calcula eroarea relativă totală, ţinând cont de precizia instrumentelor de măsură utilizate.