INTRODUCERE

1. Erori în procesul de masura

1. 1 Generalitati

Dupa cum este bine cunoscut, fizica, una din stiintele naturii, opereaza cu notiuni si marimi exprimabile cantitativ si, ca urmare (mai mult sau mai putin) precis determinabile. O operatie fundamentala în fizica este aceea de ***masurare***. Atunci când avem la dispozitie un etalon, putem compara marimea de masurat cu etalonul (cele doua marimi comparate având aceeasi natura), iar raportul, $\boldsymbol{v}$, dintre marimea de masurat, $\boldsymbol{M}$, si cea aleasa ca etalon, $\boldsymbol{M_e}$, se numeste ***valoarea numerica*** a marimii masurate:

$$v = \frac{M}{M_e} \tag{1}$$

Operatia de masurare prin comparare cu un etalon se numeste ***masurare directa***. Masurarea directa este, însa, o operatie destul de putin utilizata în practica, deoarece construirea unui etalon este, în general, dificila si, de multe ori, imposibila. Mult mai frecvent vom întâlni în laborator operatia de ***masurare indirecta***, în care o marime de interes este masurata plecând de la o relatie de calcul, în care intervin o serie de marimi fizice, care pot fi masurabile direct. Câteva exemple în acest sens ar fi: masurarea constantei elastice a unui resort, densitatea unui corp, momentul de inertie a unui rigid, viteza sunetului în diverse medii, etc.

Experienta arata ca o masuratoare repetata, în aceleasi conditii, conduce, de obicei, la rezultate care difera între ele. Aceasta dovedeste ca fiecare masuratoare este însotita de ***erori de masura***. Se numeste eroarea de masura diferenta $\boldsymbol{x - x_a}$ dintre rezultatul masurarii, $\boldsymbol{x}$, si valoarea adevarata a marimii masurate, $\boldsymbol{x_a}$ (a carei existenta este postulata). Desigur ca, în mod uzual, nu cunoastem valoarea adevarata a marimii masurate. Adesea avem o idee asupra a ceea ce ar putea sa fie valoarea adevarata a unei marimi, fie din experimente precedente (inclusiv folosind alte metode de masura), fie dintr-o abordare teoretica. Astfel de cunostinte anterioare ne ajuta sa apreciem ordinul de marime al valorii pe care o asteptam dintr-o masuratoare. Este de dorit sa gasim un procedeu de a determina, folosind datele experimentale, câta încredere putem avea în acestea.

Chiar si simpla masuratoare a lungimii uneia dintre laturile acestei carti nu constituie o exceptie de la regula: folositi o rigla asezata paralel cu latura ce urmeaza a fi masurata si cu diviziunea zero la marginea laturii de masurat. Se poate, însa afirma cu certitudine ca diviziunea zero este ***exact*** la marginea cartii? Ar trebui, mai bine, sa fie folosita o lupa ca mijloc ajutator. Cu cât marirea lupei este mai mare, cu atât pozitionarea zero-ului riglei ar fi mai ***precisa***. Poate fi aceasta o solutie viabila pentru a înlatura ***complet*** incertitudinea de pozitionare a riglei? Folosind o lupa cu marire transversala din ce în ce mai mare, la un moment dat însasi latimea reperului zero a liniei trasate pe rigla devine suparatoare! Dificultati similare apar la vizarea celuilalt capat al laturii de masurat.

Apare, apoi, o alta problema: cât de ***exacta*** a fost efectuata marcarea diviziunilor pe rigla folosita drept etalon? Marcarea unei astfel de rigle este rezultatul unei succesiuni de copieri (operatie care presupune, de asemenea, un sir de erori) plecând de la un etalon primar. În plus, lungimea scarii se poate modifica în functie de diversi factori: temperatura, timp sau umiditate.

Uneori o anumita dimensiune a unui obiect difera în diverse zone ale acestuia. De exemplu, masurând diametrul unui fir (obtinut prin trefilare), al unei bare (obtinute prin strunjire, laminare sau extrudare) sau al unei sfere cu un subler sau cu un surub micrometric vom gasi valori diferite ale diametrului în locuri diferite. O bila dintr-un material suficient de moale, cum este plumbul, va avea, dupa un numar de ani de sustinere pe o suprafata orizontala, abateri semnificative de la forma sferica. Pentru masurarea diametrului unei astfel de sfere este necesar sa se efectueze un numar mare de determinari si sa se ia în considerare o valoare medie a rezultatelor. Am putea, deci, afirma ca fiecare marime poate fi evaluata cu o anumita precizie. Precizia unei masuratori depinde de: a) instrumentul si metoda folosite în efectuarea masuratorilor; b) variatiile spatiale sau temporale ale marimii de masurat; c) numarul de masuratori efectuate.

Termenul de ***eroare***, în contextul discutat, nu are sensul de ***greseala***, ci de imposibilitatea de a afla valoarea exacta a unei marimi, datorita factorilor enumerati mai sus.

Exista, de multe ori, o anume confuzie privind întelesul si diferenta dintre notiunile de ***exactitate*** si de ***precizie***. Dictionarul limbii române contemporane precizeaza ca exactitatea reprezinta “capacitatea de a fi exact”, iar adjectivul ***exact*** înseamna “conform cu realitatea, cu adevarul”. În ceea ce priveste termenul de ***precizie***, acesta înseamna, conform aceluiasi dictionar, “faptul de a fi precis; exactitate”. Cu alte cuvinte, cele doua cuvinte au acelasi înteles! Aceeasi confuzie poate fi semnalata si în alte dictionare.

În cercetarea stiintifica, cei doi termeni au, totusi, întelesuri diferite. Exactitatea (*accuracy* în limba engleza) este o masura a apropierii valorii numerice a rezultatului fata de valoarea adevarata; exactitatea este, deci, o masura a corectitudinii unui rezultat. ***Precizia*** unui experiment este masura a cât de exact este determinat acel rezultat, fara o referire la ceea ce reprezinta acel rezultat. Precizia unui experiment este, în acelasi timp, o masura a reproductibilitatii rezultatului. ***Precizia absoluta*** indica marimea incertitudinii rezultatului, în aceleasi unitati ca si acesta. ***Precizia relativa*** indica incertitudinea sub forma unei fractiuni din valoarea rezultatului.

Referindu-ne la un experiment mentionat anterior, privind masurarea unei laturi a unei carti, sa presupunem ca rezultatul masurarii, folosind o rigla de otel, a fost de 0,299 m. Sa presupunem ca masuratoarea a fost efectuata la temperatura de 20 ºC. Întrucât etalonarea riglei a fost efectuata la 25 ºC, iar coeficientul de dilatare liniara a materialului riglei este

$5x10^{-4}$ K^{-1}, rezultatul masuratorii trebuie înmultit cu 1 - 5 x 5 x 10^{-4} = 0,9975. Asadar, noua determinare a lungimii este 0,298 m. Sa mai admitem ca experimentatorul a constatat, în decursul experimentului, ca din cauza citirii oblice (nu cum ar fi fost corect - perpendicular pe planul riglei), toate citirile trebuie corectate cu 1 mm (de exemplu, trebuie adunat 1 mm la fiecare citire). Rezultatul masuratorii se va scrie acum: L = 0,297 m. Precizia absoluta este, în cazul masuratorii folosind instrumentul mentionat, de 1 mm, iar precizia relativa este de 1/299 $\cong$ 0,3%. Corectiile facute au urmarit cresterea exactitatii, deoarece sursele de erori sistematice au fost cunoscute. Cresterea exactitatii a impus, dupa cum se vede, scaderea preciziei relative.

În orice experiment este necesar sa fie luate în considerare ***în mod diferentiat*** exactitatea si precizia. Este pierdere de timp si de energie sa se determine o marime cu o precizie foarte ridicata, atunci când se cunoaste ca exactitatea rezultatului este modesta. În schimb, nu se poate considera ca un rezultat este extrem de corect daca precizia sa este modesta. De exemplu, daca se consemneaza rezultatul masuratorii unei lungimi sub forma L = 2 m, rezultatul poate fi exact, însa cantitatea de informatie consemnata este limitata, întrucât cu precizia cu care s-a mentionat rezultatul, se poate întelege ca lungimea respectiva poate fi cuprinsa între 1,5 si 2,5 m. Daca, însa, lungimea este mentionata ca fiind L = 2,000 m - precizia rezultatului este de 1000 ori mai mare; daca, însa, se apreciaza ca exactitatea într-o astfel de masuratoare este de 10 mm, o precizie absoluta de 1 mm se dovedeste a fi inutila.

Metodele de prelucrare a datelor experimentale urmaresc, pe de o parte, aflarea unei marimi ***cât mai apropiate de cea reala***, iar pe de alta parte, gasirea unui interval de valori, în care sa se gaseasca ***cu siguranta*** valoarea adevarata a marimii masurate. Notiunile de baza în acest context sunt acelea de ***eroare reala*** (definita ca diferenta dintre valoarea masurata si cea reala), ***eroare absoluta*** (care este modulul diferentei mentionate anterior) si ***eroarea relativa***. Eroarea reala (si cea absoluta) sunt exprimate în unitatile marimii masurate; eroarea relativa, definita ca raportul dintre eroarea absoluta si valoarea adevarata a marimii masurate, este o marime adimensionala.

Desi, uneori, rezultatul unei masuratori (de lungime, de exemplu) se exprima sub forma:

$$14,6\,\text{cm} \pm 1\%$$

este de preferat sa exprimam acelasi rezultat sub forma:

$$(14,6 \pm 0,1)\text{cm}$$

1. 2 Clasificarea erorilor de masura. Caracteristici generale.

Erorile de masura se pot clasifica în 3 grupe:

1) erori grosolane

2) erori sistematice

3) erori accidentale (întâmplatoare)

Erorile grosolane apar în urma deteriorarii conditiilor principale ale masurarii. Uneori, de exemplu, din cauza iluminarii insuficiente a locului de munca, se citeste indicatia unui instrument ca fiind 3, în loc de 8. Alteori se pot folosi instrumente defecte, sau procedee de masura care conduc la aparitia în setul de date experimentale a unor valori care difera foarte mult de majoritatea celorlalte date. Deosebit de grave, prin consecintele lor pot fi erorile grosolane legate de utilizarea în mod gresit a unor instrumente de masura sau alte dispozitive experimentale (de exemplu motoare electrice, alimentatoare cu energie electrica, etc.) la tensiuni de alimentare mai mari (220V) decât cele nominale (6, 12 sau 24 V).

Caracteristica esentiala a erorilor grosolane este aceea ca ele implica valori masurate care se abat foarte mult de la o valoare medie. Erorile grosolane se elimina la începutul operatiei de analiza a rezultatelor si, pe cât posibil, se înlocuiesc cu valori gasite în urma altor masuratori, efectuate în conditii corecte.

Erorile sistematice se datoresc factorilor care actioneaza ***în acelasi mod*** în timpul efectuarii unor masuratori multiple, în aceleasi conditii experimentale, ale unei marimi fizice. Acestea sunt erorile care vor face rezultatele noastre diferite fata de valorile exacte cu discrepante reproductibile. Exemple tipice de cauze ce determina aparitia unor erori sistematice sunt: pozitionarea incorecta a instrumentului de masura fata de corpul de masurat, folosirea acestuia în alte conditii decât cele în care s-a facut etalonarea, insuficienta pregatire a metodei de masura, etc.

Erorile sistematice sunt periculoase pentru experimentator, deoarece ele sunt numai prin lipsa sau numai prin adaos si, de aceea, sursa (si efectul) lor ramâne, de multe ori, necunoscuta. De exemplu, daca se masoara modulul de elasticitate a unui material, folosindu-se metoda dinamica, adica folosind relatia $v = \sqrt{E/\rho}$ (unde $\boldsymbol{v}$ este viteza unei unde longitudinale prin materialul probei, iar ρ - densitatea acesteia), daca materialul nu este omogen (ρ variaza de la punct la punct), rezultatul va fi afectat de o eroare sistematica. O eroare sistematica va aparea si daca înainte de începerea masuratorilor nu s-a efectuat corectia de zero a instrumentului de masura.

Exactitatea unui experiment este, în general, dependenta de modul în care putem controla sau compensa erorile sistematice.

O cale de identificare a erorilor sistematice o constituie determinarea aceleiasi marimi fizice folosind metode diferite. Asa cum vom vedea într-o serie de lucrari de laborator din prezenta carte, diverse metode de masurare indirecta a aceleiasi marimi fizice sunt însotite de erori (inclusiv sistematice) diferite. În masura în care erorile sistematice nu pot fi eliminate, ele se "trec" în grupa erorilor aleatorii.

Erorile accidentale apar din cele mai diverse cauze. De multe ori ele sunt atât de mici, încât efectul lor nu poate fi sesizat (variatia temperaturii în procesul de masura, modificari ale legii de miscare din cauza unor curenti slabi de aer, etc.).

Eliminarea totala a erorilor accidentale nu este posibila, însa, folosind metodele teoriei probabilitatilor si statisticii matematice se poate evalua efectul lor asupra marimii masurate. ***Precizia*** unui experiment depinde de modul favorabil în care putem depasi sau analiza situatiile care conduc la aparitia erorilor accidentale. O exactitate data implica o precizie cel putin la fel de buna a masuratorilor si este, într-o anume masura, dependenta de erorile accidentale.

Se poate demonstra ca, daca masuratorile se efectueaza în aceleasi conditii, frecventa maxima de aparitie a unor marimi într-un set de determinari experimentale este maxima în cazul acelor marimi care difera foarte putin de valoarea medie a tuturor masuratorilor; exista din ce în ce mai putine valori care difera din ce în ce mai mult de valoarea medie (atât prin lipsa, cât si prin adaos). Daca erorile accidentale rezulta din folosirea unor instrumente putin precise, sau care nu impun încredere, aceste erori pot fi diminuate prin folosirea instrumentelor adecvate. Daca erorile accidentale rezulta din fluctuatiile statistice datorate numararii a prea putine evenimente, utilizarea unor instrumente mai precise nu se justifica; calea de urmat este, în acest caz, cresterea numarului de evenimente masurate.

Într-un grafic, în care se reprezinta pe abscisa, în ordine crescatoare, valorile numerice obtinute în urma efectuarii (în aceleasi conditii) a mai multor masuratori (afectate de erori accidentale), iar pe ordonata frecventa de aparitie a diferitelor valori în setul de rezultate, se constata o dependenta grafica denumita "clopotul lui Gauss" (Fig. 1). O astfel de dependenta corespunde legii de distributie normala a marimilor aleatorii.

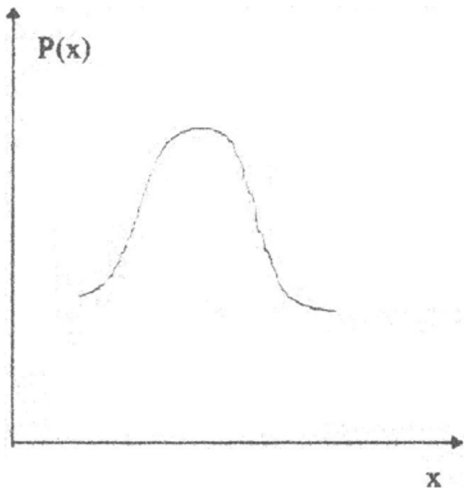

Fig. 1

Pentru descrierea împrastierii datelor fata de valoarea medie se folosesc cel mai frecvent notiunile de ***dispersie*** si ***abaterea medie patratica.*** Dispersia ***D(x)*** se defineste prin relatia:

$$D(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

Valoarea $\sigma = \sqrt{D(x)}$ se numeste ***eroare medie patratica:***

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Dispersia reprezinta marimea cea mai utilizata pentru a caracteriza împrastierea masuratorilor unor marimi fluctuante. Frecventa de aparitie a unei anumite valori în setul de determinari experimentale are semnificatia probabilitatii de aparitie a acelei valori în acel set. Pentru un numar infinit de masuratori, probabilitatea ***P(x)*** are expresia [1]:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})}{2\sigma^2}}$$

Asadar, distributia normala este determinata de doi parametri, $\bar{x}$ si σ.

Se poate afirma ca interesul nostru, ca experimentatori, este de a extrage din datele experimentale a celor mai rezonabile estimari ale marimii erorilor accidentale, care este efectul acestora asupra rezultatelor si ce încredere putem acorda rezultatelor finale.

1. 3 Compararea a doua marimi.

În mecanica, ca si în alte domenii ale fizicii, o marime fizica poate fi masurata folosind doua metode diferite. În conditiile în care citirile sunt precise, dar inexacte, compararea valorilor numerice obtinute arata ca foarte rar se întâmpla ca ele sa fie identice (aceasta este mai curând exceptia!). Daca intervalele în care se gasesc cele doua valori gasite se suprapun se spune ca cele doua valori numerice ***sunt concordante în limita erorilor de masura.***

Nu putem spune, de exemplu, ca 19,9 concorda cu 20,5, însa daca fiecare rezultat este exprimat împreuna cu eroarea sa de masura, (de exemplu 19,9 ± 0,3 si 20,5 ± 0,4), se observa ca exista un interval în care avem o "***suprapunere***" a valorilor. Într-adevar prima marime poate fi cuprinsa între 19,6 si 20,2, iar a doua - între 20,1 si 20,9. Daca, dimpotriva rezultatele ar fi fost 19,9 ± 0,2 si 20,5 ± 0,2, se afirma ca rezultatele difera prin mai mult decât erorile lor experimentale.

1. 4 Erori de rotunjire

În orice valoare masurata exista o eroare, determinata de rotunjirea ultimei cifre mentionate. Daca o lungime este mentionata ca fiind 10,3 cm, aceasta înseamna ca valoarea adevarata se afla undeva între 10,25 si 10,35 cm. Eroarea de rotunjire este deci 0,05 cm.

Daca lungimea masurata ar fi fost exprimata ca 10,30 cm (adica între 10,295 si 10,305), mentionarea celei de-a doua zecimale ne arata ca masuratorile au fost efectuate în conditiile în care eroarea nu este, în acest caz, mai mare de 0,005 cm.

Daca, de exemplu, viteza luminii în vid este scrisa sub forma 300.000 km/s, nu rezulta clar daca cele 5 zerouri sunt un indiciu al unei valori exacte sau daca ele au doar rolul de a exprima ordinul numarului considerat. O valoare mai precisa este 299.800 km. Daca numarul va fi exprimat ca o putere a lui 10 - adica de forma $3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$ - nu exista confuzii asupra erorii de rotunjire. În acest caz numai primele doua zerouri sunt semnificative. Se spune în acest caz, ca viteza luminii este exprimata ***cu trei cifre semnificative***. Într-o exprimare cu 4 cifre semnificative valoarea acestei viteze este $2{,}998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$. În laboratorul de mecanica valorile masurate au, în general 3 cifre semnificative. În mod ocazional se poate întâmpla sa fie posibila obtinerea unor rezultate care se exprima prin numere cu doua sau cu patru cifre semnificative.

Un caz interesant, destul de frecvent discutat, este acela al erorii determinate de utilizarea numarului irational π. Într-o exprimare cu 10 cifre semnificative $\pi = 3{,}1415926536$. Cu 4 cifre semnificative el este 3,142, iar cu trei cifre semnificative - 3,14. În calcule vom lua o valoare a lui π cu un numar suficient de cifre semnificative, astfel încât erorile datorite rotunjirii valorii lui π sa fie semnificativ mai mici decât sunt erorile ce însotesc masurarea celorlalte marimi ce intervin în aceeasi relatie de calcul. Este interesant de remarcat ca numarul π a fost recent determinat cu 100.000 de cifre semnificative, care, totusi, nu pot satisface pe cel mai exigent experimentator.

1. 5 Erori ce însotesc masurarea lungimii

Masurarea lungimii necesita utilizarea mai multor tipuri de instrumente, care sunt alese, asa cum vom vedea ulterior, în functie de contextul experimentelor. Amintim, în continuare, câteva particularitati ale unora dintre cele mai utilizate astfel de instrumente.

Rigla din lemn este un instrument frecvent utilizat în laborator. În legatura cu folosirea sa, trebuie facute câteva precizari asupra erorilor introduse în procesul de masura. Lungimea unei rigle de lemn poate se poate modifica semnificativ în timp; se întâmpla adesea ca lungimea unei rigle de 50 cm sa se modifice cu 1 mm, adica cu $\pm$ 0,2%. Daca nu au existat erori de inscriptionare a riglei, în masuratorile în care se foloseste o rigla de lemn trebuie considerata o eroare sistematica de 0,2% datorita impreciziei scalei.

Daca zeroul de pe rigla este sters sau incert ca pozitie, se poate folosi drept origine o alta diviziune de pe scala, iar rezultatul masuratorii se obtine prin scadere.

Erorile de paralaxa, care apar în cazul citirii oblice pe o rigla (sau pe scala unui aparat cu ac indicator) pot fi reduse daca se plaseaza rigla cât mai aproape de obiectul de masurat, rigla fiind privita razant la suprafata sa, dinspre muchia ei, astfel încât divi-ziunile sa fie de-a lungul directiei de vizare. Eroarea totala care afecteaza o lungime masurata cu o rigla de lemn este de 0,2%, plus eroarea de citire, care este de ± 0,5 mm. Evident, pentru a aduna cele doua valori, ele trebuie exprimate ca erori absolute.

Rigla de otel, construita de obicei de o firma producatoare de aparatura stiintifica va introduce, în timpul masurarii, erori de cel mult o zecime de mm la 1 m. Cu alte cuvinte, eroarea sa de etalonare este de aproximativ 0,01%, o valoare neglijabila în comparatie cu erorile de citire de pe scala. În cazul unei citiri îngrijite, un astfel de instrument de masura se caracterizeaza printr-o eroare totala (de citire la ambele capete plus de etalonare) de aproximativ ±0,2 mm, în functie de experienta observatorului.

Sublerul este instrumentul cel mai utilizat în laboratorul de mecanica, pentru masurarea lungimilor. Pentru a masura o dimensiune a unui obiect, acesta se introduce între bratele sublerului, se face citirea, apoi obiectul se îndeparteaza si se face verificarea zero-ului. Se întâmpla în unele cazuri ca pozitia zero-ului sa se abata de la valoarea reala (care corespunde pozitiei în care bratele sunt lipite unul de altul) cu câteva zecimi de mm, de o parte sau de alta. Eroarea totala ce caracterizeaza o masuratoare folosind sublerul este de ± 0,1 mm[1].

Surubul micrometric este un instrument caracterizat de o eroare maxima de ±0,01 mm, în conditiile utilizarii sale corecte. Erori suplimentare pot apărea datorita strângerii diferite a surubului care roteste tamburul micrometric. Este nevoie ca la fiecare masuratoare aceasta strângere sa fie constanta. De aceea, în majoritatea cazurilor, micrometrul este prevazut cu un mecanism ce determina un efect de patinare, daca strângerea depaseste un anumit prag. O corectie de zero trebuie întotdeauna efectuata initial, ca si în cazul sublerului. Intervalul minim dintre doua diviziuni de pe tamburul micrometrului corespunde unei lungimi de 0,01 mm.

1. 6 Erori la masurarea masei

Folosind, pentru masurarea masei, o balanta, exista doua surse principale de erori: prima este legata de imprecizia de etalonare a maselor marcate utilizate, iar a doua - în abilitatea de a fixa momentul echilibrarii balantei. Aceasta a doua sursa de erori rezulta din dificultatea de a citi cu exactitate pe scara balantei sau din faptul ca, uneori, sensibilitatea acesteia este insuficienta. Sensibilitatea balantei poate fi afectata si de tocirea cutitelor de suspensie a bratului acesteia, fapt pus în evidenta prin aceea ca adaugarea de mase mici pe unul din talere nu produce o deviatie masurabila.

1. 7 Erori în cazul aflarii unor marimi dintr-o relatie calcul.

Deoarece marimile care intervin în relatia de calcul a unei alte marimi fizice, obtinute prin masurare indirecta, sunt afectate ele însele de erori, este de asteptat ca rezultatul sa fie, de asemenea, afectat de o anumita eroare. Este de înteles ca o valoare calculata, $\boldsymbol{y}$, nu poate fi mai precisa decât valorile masurate, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ... care intra în formula de calcul respectiva, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2,...)$. Este de asteptat ca erorile ce apar atunci când sunt efectuate masuratorile marimilor $\boldsymbol{x}_i$ sa se acumuleze, iar eroarea ce afecteaza pe $\boldsymbol{y}$ sa fie mai mare decât erorile ce afecteaza masuratorile fiecarei marimi $\boldsymbol{x}_i$. Pentru a obtine o valoare corecta a lui $\boldsymbol{y}$ în limita a ± 1% este necesar sa se faca masuratori asupra variabilelor $\boldsymbol{x}_i$ cu erori mai mici decât 1%.

Acest lucru va fi ilustrat în cele ce urmeaza, mai întâi într-un mod semi-cantitativ, folosind o metoda bazata pe cifre semnificative, iar apoi, într-o maniera mai precisa, analizând valorile numerice ale erorilor care însotesc fiecare cantitate folosita în formula de calcul. Desi aceasta discutie nu are rigoarea unei analize statistice, ea ne va oferi o cale de a estima precizia unui rezultat.

Sa consideram ca într-un experiment sunt folosite doua mase, cântarite în prealabil si ca rezultatul cântaririi a fost 19,3 g si 1,52 g. Cât va fi suma celor doua mase ? Corpul cu

[1] Exista si sublere care au 20 de diviziuni pe vernier, deci care se caracterizeaza printr-o eroare totala de ± 0,05 mm; în laboratorul nostru, vom folosi sublere cu eroarea totala de ± 0,1 mm.

masa de 19,3 g poate avea, de fapt, o masa cuprinsa între 19,25 si 19,35 g. Prima zecimala ne-mentionata în rezultatul cântaririi (sutimea de gram) ar putea fi 0, 1, 2, 3, 4, 5 sau -1, - 2, -3, -4, -5. Vom conveni, în cele ce urmeaza, sa marcam cifrele ne - mentionale cu semnul întrebarii (?). O masuratoare mai precisa ne va permite sa înlocuim semnele de întrebare cu cifre. Suma care se va obtine va fi:

```
19,3??+
 1,52?
-------
20,8??
```

Suma este, deci, 20,8 g, toate cifrele de dupa 8 fiind necunoscute (suma lui 2 cu un numar necunoscut este, de asemenea, un numar necunoscut).

Un exemplu similar poate fi dat pentru scadere:

```
31,4??–          75,2??–
 3,6??    sau     0,025
------           ------
27,8??           70,2??
```

Este, deci, normal, sa rotunjim la acelasi numar de cifre semnificative doua numere ce urmeaza a fi adunate sau scazute: de exemplu, 33,6 minus 2,67 trebuie modificat la 33,6 minus 2,7, care va da rezultatul 30,9.

Acelasi procedeu de înlocuire a cifrelor ne-înregistrate folosind semne de întrebare se poate folosi si în cazul operatiilor de înmultire si împartire:

```
a)    4,12?x              b)  233????|174?
      2,31?                   174?   |1,34?
      -----                   = 59??
      ????                      522?
     412?                       = 7???
   1236?                          696?
   824?                           1????
   -------
   9,51????
```

Exemplul (***a***) arata ca produsul a doua numere, fiecare cu 3 cifre semnificative are numai 3 cifre semnificative. Este corect sa spunem, în conditiile noastre, ca produsul 4,12 x 2,31 = 9,51 si nu 9,5172. Acest din urma numar implica o masuratoare mult mai exacta decât a fost, de fapt, efectuata în realitate. În exemplul (***b***) constatam ca, prin împartirea unui numar cu 3 cifre semnificative la un altul cu 3 cifre semnificative rezulta un alt numar, de asemenea, cu 3 cifre semnificative.

Regula generala spune, deci, ca prin înmultirea sau împartirea a doua numere exprimate cu un numar diferit de cifre semnificative, rezultatul are un numar de cifre semnificative ca si acela al termenului cu cele mai putine cifre semnificative.

Asadar, în conditiile în care citirile din laboratorul nostru au un numar de 3 cifre semnificative, rezultatul va trebui exprimat, de asemenea cu 3 cifre semnificative.

2) Calculul erorilor

2. 1 Adunarea

Sa consideram ca avem de adunat doua numere: 75,3 ± 0,2 si 7,6 ± 0,4. Suma celor doua numere exacte este 82,9, dar cât de exact este acest rezultat ? Primul numar poate fi cuprins între 75,1 si 75,5, iar al doilea - între 7,2 si 8,0. Asadar suma lor poate fi cuprinsa între 75,1 + 7,2 = 82,3 si 75,5 + 8,0 = 83,5. Deci, rezultatul trebuie scris ca fiind 82,9 ± 0,6. Eroarea 0,6 rezulta prin însumarea erorilor celor doua numere.

Folosind scrierea simbolica, suma a doua numere $\boldsymbol{a \pm \Delta a}$ si $\boldsymbol{b \pm \Delta b}$, poate avea o valoare minima $(\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} - \Delta\boldsymbol{b})$ sau $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{b})$ si una maxima $(\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (\Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{b})$. Într-o scriere condensata, rezultatul însumarii este $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \pm (\Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{b})$. Paranteza a doua reprezinta eroarea care afecteaza suma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Eroarea $\Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{b}$ este eroarea maxima care afecteaza suma; ea se numeste ***eroare posibila***. ***Concluzia este, deci, ca atunci când se aduna doua numere, erorile absolute se aduna.***

Frecventa de aparitie în practica a erorii posibile este destul de redusa si, de aceea, o evaluare mai realista care afecteaza suma este obtinuta o reprezinta asa - numita ***eroare probabila,*** definita prin in relatia:

$$\Delta x' = \sqrt{\sum_i \Delta x_i^2}$$

2. 2 Scaderea

Sa consideram aceleasi numere, ca si în cazul precedent. Limitele rezultatului scaderii variaza între 75,5 - 7,2 = 68,3 si, respectiv, 75,1 - 8,0 = 67,1. Diferenta dintre numerele exacte este 67,7;

Rezultatul va fi scris: 67,7 ± 0,6. Folosind scrierea simbolica:

$$(a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b) = (a - b) \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Asadar ***si în cazul scaderii, erorile absolute se aduna.*** Si în cazul scaderii, eroarea posibila este exagerat de mare în foarte multe cazuri; de aceea si calitate de eroare totala se ia eroarea probabila.

2.3 Înmultirea

Operatia de înmultire este foarte frecvent întâlnita la calculul diverselor marimi fizice. Sa consideram, de exemplu calculul ariei. Imprecizia de aflare a ariei depinde de imprecizia de masurare a lungimii laturilor. Sa consideram un dreptunghi de laturi $\boldsymbol{a}$ si $\boldsymbol{b}$, masurate cu erorile $\Delta\boldsymbol{a}$ si $\Delta\boldsymbol{b}$ (Fig. 2).

Erorile relative vor fi $\frac{\Delta a}{a}$ si $\frac{\Delta b}{b}$. Notând aria cu $\boldsymbol{A}$, eroarea relativa a ariei va fi $\frac{\Delta A}{A}$ sau $\frac{\Delta A}{ab}$.

Aria poate avea o valoare minima:

$$A_{\min} = (a - \Delta a)(b - \Delta b)$$

si o valoare maxima:

$$A_{\max} = (a + \Delta a)(b + \Delta b).$$

Eroarea este egala cu aria fâsiilor în forma de L (vezi Fig. 2), hasurate cu linii înclinate spre stânga sau spre dreapta, plasate în interiorul si, respectiv, în exteriorul suprafetei (ab). Aceste zone difera între ele prin ariile dreptunghiurilor din coltul din dreapta - sus, care sunt, de fapt, neglijabile.

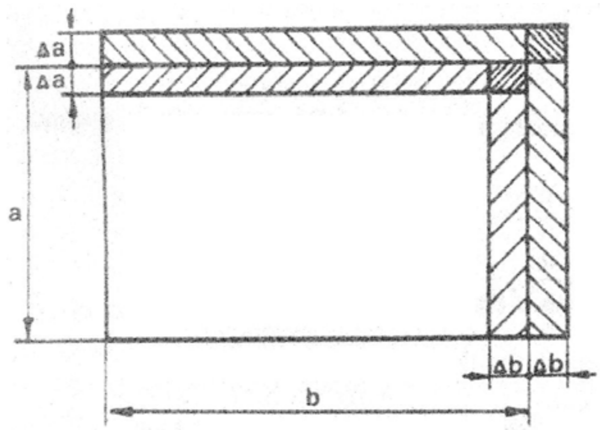

Fig. 2

Putem spune, deci, ca aria suprafetei ce reprezinta eroarea este $\boldsymbol{b\Delta a}$ + $\boldsymbol{a\Delta b}$. Aria va putea fi scrisa sub forma $\boldsymbol{ab} \pm (\boldsymbol{b\Delta a} + \boldsymbol{a\Delta b})$, în care ultima paranteza este:

$$\Delta A = b\Delta a + a\Delta b$$

Putem scrie ca eroarea relativa care afecteaza marimea ariei este:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \tag{3}$$

Asadar, ***în cazul înmultirii a doua numere, eroarea relativa a sumei este egala cu suma erorilor termenilor din produs***.

2. 4 Ridicarea la putere

În acest caz numarul se înmulteste cu el însusi si, de aceea, rezultatul gasit în cazul multiplicarii ramâne si aici valabil. De aceea, eroarea relativa ce afecteaza marimea $y = x^n$ este:

$$\frac{\Delta y}{y} = n\frac{\Delta x}{x},$$

unde $\frac{\Delta x}{x}$ este eroarea relativa a marimii $\boldsymbol{x}$.

2. 5 Împartirea

Sa consideram fractia $\frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b}$. Ea poate fi scrisa si sub forma:

$$Q \pm \Delta Q = \frac{a\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)}{b\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)} = \frac{a}{b}\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)^{-1} \tag{4}$$

Daca $\frac{\Delta a}{a} << 1$ si $\frac{\Delta b}{b} << 1$, dupa efectuarea produsului celor doua paranteze:

$$Q \pm \Delta Q = \frac{a}{b}\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta a \cdot \Delta b}{ab}\right) \tag{5}$$

se poate neglija ultimul termen. Vom scrie apoi:

$$Q \pm \Delta Q = \frac{a}{b}\left(\frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}\right)\frac{a}{b}$$

în care:

$$Q = \frac{a}{b}$$

Atunci:

$$\Delta Q = \left(\frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}\right) Q \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Eroare rezultanta este egala cu suma erorilor relative ale factorilor împartirii.

Daca într-o formula intervine atât înmultirea, cât si împartirea unor termeni:

$$y = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d^n}{e \cdot f \cdot g} \tag{6}$$

eroarea relativa, $\frac{\Delta y}{y}$, va fi:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + n\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta g}{g} \tag{7}$$

Si în acest caz, o valoare mai realista a erorii totale va fi data de cantitatea $\sqrt{\sum \Delta x_i^2}$.

2. 6 Metoda diferentialei logaritmice

Rezultatele gasite pâna acum pot fi generalizate sub forma asa - numitei metode a diferentialei logaritmice. Sa consideram ca relatie de plecare - relatia (6). Prin logaritmarea ei (în baza ***e***) gasim:

$$\ln y = \ln a + \ln b + \ln c + \mathrm{n} \ln d - \ln e - \ln f - \ln g \tag{8}$$

Diferentiind ecuatia (8) si trecând la variatii finite:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + n\frac{\Delta d}{d} - \frac{\Delta e}{e} - \frac{\Delta f}{f} - \frac{\Delta g}{g} \tag{9}$$

Eroarea posibila, $\frac{\Delta y}{y}$, va fi data de relatia:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\mathrm{n}\Delta d}{d} + \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta g}{g} \tag{10}$$

rezultat identic cu cel exprimat prin relatia (7). De mentionat ca în relatia (10) am considerat cazul cel mai defavorabil, anume acela în care erorile $\Delta\boldsymbol{e}$, $\Delta\boldsymbol{f}$ si $\Delta\boldsymbol{g}$ sunt prin lipsa. Aceste consideratii servesc la planificarea experimentului si alegerea instrumentelor sau a conditiilor de lucru. Dupa efectuarea masuratorilor precise, dar inexacte, unde intervin erorile accidentale se trece la analiza erorilor folosind acesta metoda.

2. 7 Eroarea asupra mediei

Exista doua marimi care descriu eroarea sub forma unei medii. Variatiile inerente care apar în urma repetarii unei masuratori pot fi exprimate fie ***prin abaterea medie sau prin abaterea standard***. Abaterea medie reprezinta deviatia mediata a citirilor individuale fata de o valoare medie a tuturor citirilor. Ea trebuie calculata luând în considerare erori absolute, deci:

$$\text{abaterea medie} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \overline{x}}{n} \tag{11}$$

Sa onsideram, de exemplu, un experiment în care se determina perioada unui pendul gravitational (Tabelul 1):

Tabelul 1

Determinarea perioadei unui pendul gravitational.

Nr. det.	Nr.de oscilatii	t (s)	T (s)	$\lvert T - \overline{T} \rvert$ (s)
1	100	131	1,31	0,01
2	100	133	1,33	0,03
3	100	128	1,28	0,02
4	100	128	1,28	0,02
5	100	130	1,30	0,00
Suma	500	650	6,50	0,08
Media	100	130	1.30	0,016

Valoarea medie a perioadei este 1,30 s, iar abaterea medie a determinarilor individuale - 0,016 s ≅ 0,02 s. Rezultatul se va scrie în final: T = (1,30 ± 0,02)s.

Alte expresii ale variatiilor individuale sunt ***varianța*** si ***abaterea standard***, care sunt bazate pe o analiza statistica riguroasa.

Varianta se noteaza, de obicei, cu σ^2 si se defineste ca:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})}{n}$$

Marimea:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})}{n}} \tag{12}$$

se numeste ***abatere standard.***

O alta marime ce se foloseste în prelucrarea datelor experimentale este estimarea ***S*** a abaterii standard reale, σ , data de formula:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{13}$$

Din relatia (13) se constata ca ***S*** nu poate fi calculata pentru ***n*** = 1, caz în care abaterea standard este 0. O singura masuratoare nu ne poate oferi o estimare a erorii abaterii, de aceea formula ce foloseste termenul ***n - 1*** de la numitor este mai realista. Pentru un numar mare de determinari, marimile ***S*** si σ devin egale.

În Tabelul 2 sunt prezentate rezultatele citirii timpului de cadere a unei sfere într-un fluid vâscos si este prezentata metoda de calcul a abaterii standard.

Tabelul 2

Determinarea timpului de cadere a unei sfere în ulei.

Nr. det.	t (s)	$\lvert t - \bar{t} \rvert$ (s)	$(t - \bar{t})^2$ (s^2)
1.	12,8	0,0	0,00
2.	12,6	0,2	0,04
3.	12,6	0,2	0,04
4.	12,4	0,4	0,16
5.	13,0	0,2	0,04
6.	13,2	0,4	0,16
7.	12,8	0,0	0,00
8.	13,2	0,4	0,16
9.	12,8	0,0	0,00
10.	13,0	0,2	0,04
Suma	128,4		0,48

$$S^2 = \frac{\sum_i (t_i - t)^2}{n-1} = \frac{0{,}48}{9} = 0{,}05(3) \Rightarrow S = 0{,}23$$

Rezultatul este, deci, ca timpul mediu de cadere este 12,8 s, cu o abatere standard de 0,2 s. Acest rezultat se bazeaza pe zece masuratori; daca s-ar fi efectuat un numar mult mai mare de determinari, iar media s-ar fi calculat din acest numar mare, s-ar fi obtinut pentru abaterea standard o valoare diferita. Cu cât este mai mare numarul de determinari, cu atât valoarea medie se apropie mai mult de cea adevarata. În acest din urma caz 67,5% din valorile gasite pentru timpul de cadere s-ar gasi în intervalul de 0,2 s. Deviatia standard este un indiciu al modului cum difera o citire fata de alta si nu al acuratetei de determinare a mediei. Când numarul de determinari creste, abaterea standard tinde spre o valoare constanta.

Analiza statistica arata ca exactitatea mediei aritmetice variaza proportional cu radacina patrata din numarul determinarilor. Eroarea în estimarea mediei, denumita eroarea standard este data de $\pm\frac{S}{\sqrt{n}}$, unde S este estimarea abaterii standard, iar ***n*** - numarul de determinari. În exemplul precedent eroarea asupra mediei este, numeric, egala cu $\frac{0,2}{\sqrt{10}} = 0,06 \cong 0,1s$. Timpul mediu de cadere a fost, deci, determinat ca fiind 12,8 $\pm$ 0,1 s (deci cu o eroare relativa de $\frac{0,1}{12,8} \cong 0,8\%$).

Un rezumat al celor aratate pâna în prezent arata ca:

Nici o masuratoare nu este exacta. Exista erori datorate limitelor posibilitatilor ***de citire*** a rezultatelor, ***calibrarii*** instrumentului respectiv, precum si unor ***variatii inerente*** a marimilor fizice de masurat.

Erorile ce afecteaza un rezultat al unui calcul se pot gasi folosind urmatoarele reguli:

1) Când marimile se aduna sau se scad, erorile absolute se aduna.

2) Când marimile sunt înmultite sau împartite, erorile relative se aduna.

3) Eroarea relativa la ridicarea la puterea a ***n -*** a este egala cu de ***n*** ori eroarea relativa a marimii ce se ridica la respectiva putere.

4) Eroarea probabila este determinata de radacina patrata din suma patratelor erorilor.

5) Când au fost efectuate un numar ***n*** de determinari ale unei marimi ***x***, valoarea medie a lui ***x*** este $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$.

6) Daca abaterile fata de medie depasesc precizia masuratorilor, atunci erorile pot fi exprimate prin:

- abaterea medie: $\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})$
- estimarea abaterii standard: $\rho = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
- eroarea standard a mediei: $\frac{S}{\sqrt{n}}$

3. Metoda grafica de analiza a datelor experimentale.

Analiza stiintifica este un proces similar "spargerii" unui mesaj codificat conform unui anumit cifru. Un mesaj este, în acest caz, o serie de date dintr-un experiment. Problema este aceea de a gasi o relatie dintre marimile variabile.

Un principiu al metodelor analitice este acela ca se poate, printr-un experiment dat, gasi numai dependenta a doua marimi. Experimentul sau datele trebuie astfel aranjate, încât doar doua din ele sunt variabile, iar celelalte sunt mentinute constante. În acest mod, daca dependenta studiata se dovedeste a fi de forma $y = f\left(x_1, x_2, x_3, ...\right)$, într-o serie de determinari se urmareste dependenta $y = f(x_k)$, variabilele independente $X_i \neq x_K \left(i \neq K\right)$ sunt mentinute constante (deci joaca rol de parametri). Procedura este repetata apoi, studiindu-se independenta $y = f\left(x_m\right)$, iar $x_i \neq x_m$ (m $\cong$ k).

Iata un exemplu în acest sens: Sa consideram un pendul gravitational de lungime $\boldsymbol{l}$ si masa $\boldsymbol{m}$. Perioada acestuia ar putea depinde de lungime, de masa $\boldsymbol{m}$ si de unghiul de deviatie, θ de la pozitia verticala: $\boldsymbol{T = f(l,m,\theta)}$. Fiecare variabila independenta trebuie modificata în câte o serie de experimente. De exemplu, într-o prima serie de experimente se modifica doar θ , iar masa si lungimea sa sunt mentinute constante. Se studiaza apoi dependenta $\boldsymbol{T = f(l)}$, $\boldsymbol{m}$ si θ fiind mentinute constante iar în final se studiaza dependenta $\boldsymbol{T = f(m)}$. La o analiza ulterioara a rezultatelor se gaseste ca perioada depinde de lungimea pendulului, conform unei relatii de forma $T = c\sqrt{l}$, unde $\boldsymbol{c}$ este o constanta. Daca unghiul este mentinut la valori mici, nici $\boldsymbol{m}$ si nici θ nu apar în dependenta $\boldsymbol{T = f(l)}$. Dupa o analiza teoretica se gaseste ca constanta $\boldsymbol{c}$ este:

$$c = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \tag{14}$$

unde $\boldsymbol{g}$ este acceleratia gravitationala.

Analiza datelor dintr-un experiment presupune întotdeauna gasirea relatiei dintre doua variabile si de aceea vom analiza în continuare diverse tipuri de dependente functionale. Daca o variabila (marime fizica) este legata de o alta, fiecarei valori a uneia îi corespunde o valoare a celeilalte. Unei mici variatii a unei marimi îi corespunde o mica variatie a celeilalte marimi, iar o variatie continua a unei marimi determina variatia continua a celeilaltei marimi. Concluzia este ca dependenta celor doua marimi poate fi reprezentata sub forma unei linii.

Un prim scop al reprezentarii grafice este acela de a verifica daca exista o dependenta între doua marimi analizate; daca o astfel de dependenta exista, atunci multimea perechilor $\boldsymbol{(x_i, y_i)}$, care sunt puncte într-o reprezentare grafica $y = y(x)$, se vor aseza pe o linie. Pentru a determina o linie este nevoie de un numar mare de puncte. Numarul acestora depinde de forma liniei; când aceasta forma nu este cunoscuta, cu cât avem la dispozitie mai multe puncte, cu atât linia va fi construita cu precizie mai mare (doua puncte determina o linie numai daca acea linie este o dreapta, în caz contrar este necesar sa fie cunoscute mult mai multe puncte).

În Fig. 3 este reprezentata dependenta de densitate a vitezei de propagare a unei unde elastice longitudinale în diverse metale. Nu se poate construi o linie simpla care sa uneasca toate aceste puncte si, ca urmare, se poate afirma ca nu exista o corelatie între viteza undelor longitudinale si densitatea materialelor mentionate.

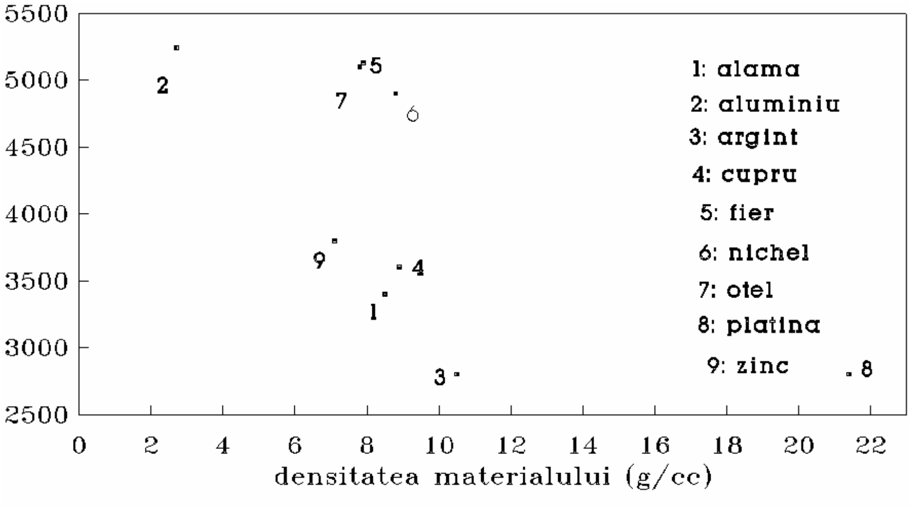

Fig. 3

În Fig. 4 este reprezentata dependentei aceleiasi marimi - viteza undelor elastice longitudinale - în functie de raportul dintre modulul de elasticitate al acelorasi materiale si densitatea acestora. Aceste puncte par sa se situeze pe o curba.

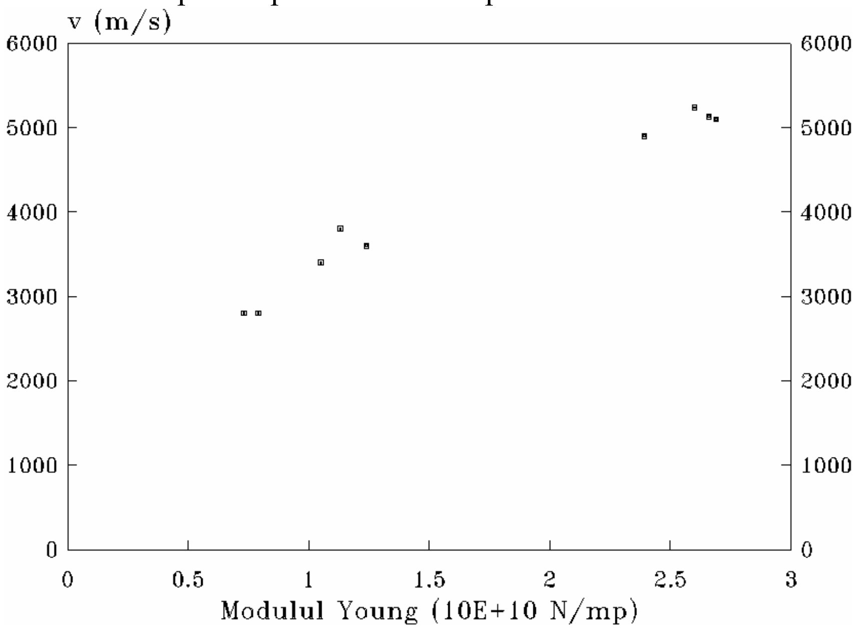

Fig. 4

Acest grafic arata doar existenta unei relatii între cele doua marimi; este necesara gasirea expresiei analitice a acestei curbe, adica ecuatia care leaga aceste marimi.

Forma câtorva din dependentele mai simple este prezentata în Fig. 5, a si b. Din aceste dependente au fost figurate doar câteva puteri. Examinând o linie este practic imposibil sa spunem carei ecuatii îi corespunde, cu exceptia cazului când linia respectiva este o dreapta. Dreapta este un element cheie într-o analiza grafica, întrucât numai ea poate fi precizata dintre toate tipurile de linii. Problema se reduce, deci, la a gasi o posibilitate de a reprezenta datele experimentale, astfel ca graficul sa devina o dreapta.

Exista mai multe modalitati pentru a realiza acest lucru. Unele se aplica numai în cazurile particulare, altele au caracter general. Nu exista o reteta generala si, de obicei, se încearca mai multe tipuri de liniarizare a dependentei.

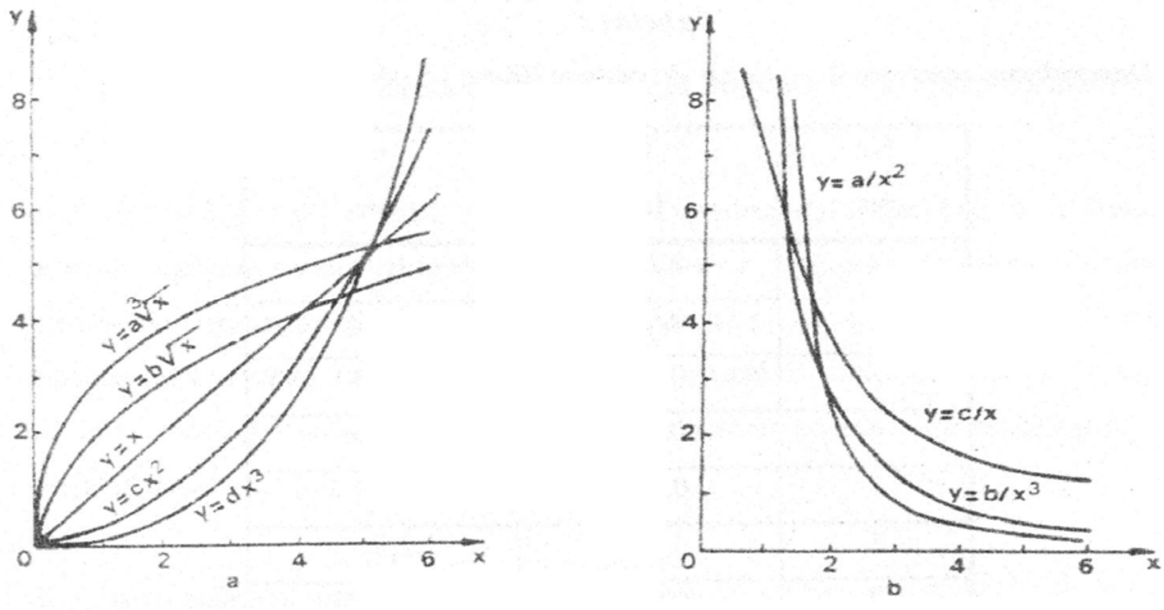

Fig. 5

3. 1 Relatii liniare

Ecuatia generala a unei drepte, dupa cum este bine cunoscut, este:

$$y = a + bx$$

unde ***a*** este ordonata la origine, iar ***b*** - panta. Aceasta este denumita de obicei ***panta fizica*** a dreptei, o marime care are dimensiunea fizica a raportului ***y/x,*** spre a o deosebi de panta grafica, care este o marime adimensionala, fiind egala cu raportul dintre lungimea segmentului de dreapta - cateta opusa împartita la lungimea segmentului de dreapta ce reprezinta cateta alaturata.

În Tabelul 3 sunt prezentate, ca o baza de discutie, rezultate ale masuratorilor vitezei atinse în decursul caderii în aer a unei bile grele, în functie de timpul de cadere. Aceste date sunt reprezentate grafic în Fig. 6. Observati modul de marcare a valorilor scarii pe cele doua axe (doar câteva valori principale au fost înscrise lânga acestea).

Tabelul 3

Dependenta temporala a vitezei de cadere libera în câmpul gravitational.

Nr. det.	t (s)	v (m/s)
1	0,033	1,08
2	0,067	1,50
3	0,100	1,64
4	0,133	1,96
5	0,167	2,34
6	0,200	2,66
7	0,233	3,11
8	0,267	3,48
9	0,300	3,66
10	0,333	3,84
11	o,367	4,27

Remarcati ca nu toate punctele se aseaza pe dreapta; nici nu era de asteptat acest lucru, deoarece datele experimentale nu sunt niciodata exacte. Punctele sugereaza totusi, o dependenta liniara, de aceea acest tip de linie a fost reprezentata în acest caz. O astfel de dreapta reprezinta dreapta de cea mai buna aranjare (în engleza *the best fit*) în raport cu punctele experimentale.

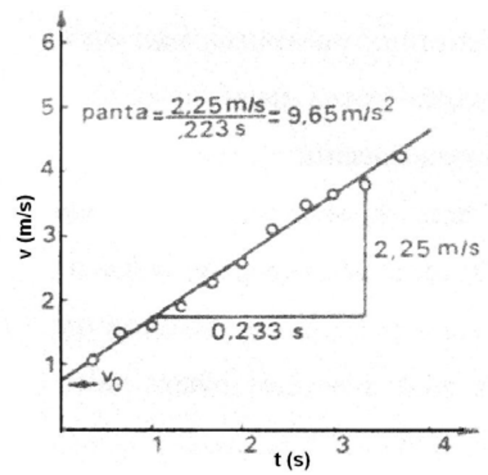

Fig. 6

Rezulta, deci, ca dependenta anterioara ar putea fi scrisa sub forma:

$$v = v_0 + at \qquad (15)$$

unde $\boldsymbol{v} \cong 0{,}8$ m/s si $\boldsymbol{a} = \text{tg}\alpha = 9{,}65$ m/s². Experimentul sugereaza ca, în limita erorilor experimentale, acceleratia de cadere a corpului respectiv ramâne constanta. Diferenta relativa dintre valoarea gasita si cea acceptata ca fiind reala este de aproximativ 1,6%. Aceasta diferenta poate fi explicata numai dupa o analiza atenta a factorilor externi care afecteaza miscarea (rezistenta aerului, forta arhimedica, etc.)

3. 3 Dependenta sub forma unei puteri

O dependenta frecvent întâlnita în practica este de forma:

$$u = K v^n \tag{16}$$

în care ***n*** este un numar întreg, fractionar, pozitiv sau negativ, iar ***K*** este o constanta (aceasta situatie include toate cazurile prezentate în Fig. 5a si b).

Logaritmând ecuatia precedenta gasim:

$$\log u = \log K + n \log v \tag{17}$$

Daca notam ***y*** = **log *u*** si ***x*** = **log *v*** si ***b*** = **log *K***, ecuatia (17) devine:

$$y = b + n x \tag{18}$$

adica ecuatia unei drepte, de panta ***n*** si ordonata la origine ***b***.

Aceasta metoda poate fi ilustrata cu un set de date prezentate în Tabelul 4. Datele reprezinta informatii experimentale cu privire la distanta medie fata de Soare si de perioada de roatatie pentru primele patru planete ale sistemului Solar.

Tabelul 4

Date despre primele 4 planete ale sistemului Solar

Planeta	Dist.medie fata de Soare, ***R*** (m)	Perioada de rotatie (ani)	log R	log T
MERCUR	$5{,}79.10^{10}$	0,241	10,7627	- 0,6180
VENUS	$10{,}81.\ 10^{10}$	0,617	11,0383	- 0,2097
PAMANT	$14{,}59.\ 10^{10}$	1,000	11,1746	0,0000
MARTE	$22{,}78\ .10^{10}$	1,881	11.3576	0,2744

În Fig. 7 este reprezentata dependenta ***T(R)***. Punctele par sa se aseze pe o curba, a carei natura nu o cunoastem. În Fig. 8 este reprezentata dependenta *log T = f(log R)*.

Aici punctele se situeaza pe o dreapta într-un mod foarte exact. Panta acestei drepte este 1,50. Ecuatia dreptei reprezentata în Fig. 8 este deci:

$$T = \text{const} \cdot R^{1,50} \quad \text{sau} \quad T^2 = K\, R^{3,00}$$

Cu alte cuvinte, pentru aceste planete, raportul $\dfrac{T^2}{R^3}$ este constant. Acest fapt a fost descoperit de Kepler si a servit lui Newton sa ajunga la expresia legii atractiei universale.

Reprezentarea log - log descrisa este o tehnica aplicabila în cazul unei dependente exprimate sub forma unei puteri, ca în relatia (16), si ea permite determinarea precisa a exponentului ***n***.

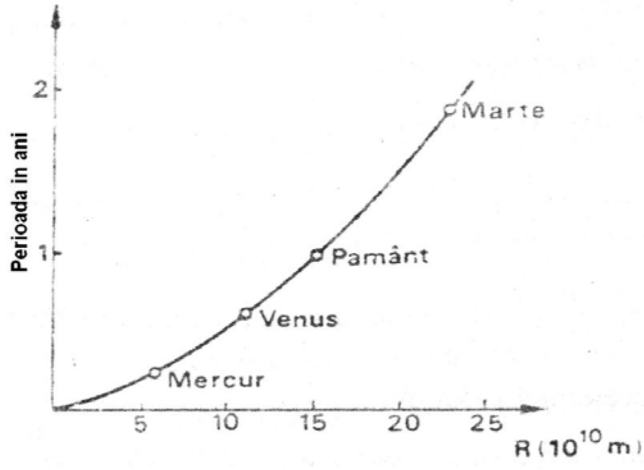

Fig. 7

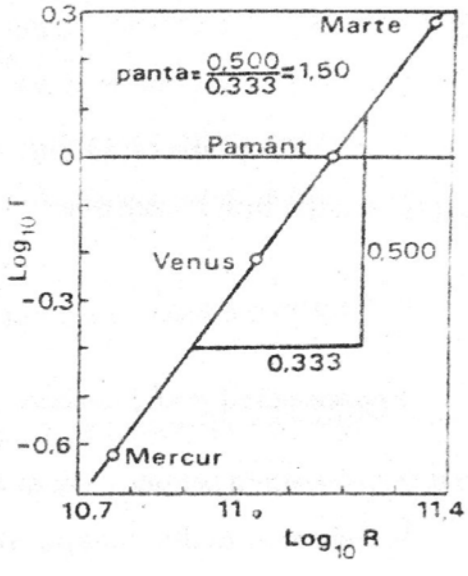

Fig. 8

O astfel de reprezentare grafica poate, de asemenea, servi la verificarea caracterului unei dependente ***y(x)***, atunci când caracterul acesteia este cunoscut. Determinarile experimentale vor aparea în grafic sub forma unor puncte de o parte si de alta a dreptei (unele chiar pe ea !), iar masura în care aceste puncte se abat de la dreapta constituie un calificativ al calitatii determinarilor.

În general,daca ne asteptam ca relatia verificata sa fie de tipul:

$$u^n = c\,v^m \tag{19}$$

vom nota $\boldsymbol{y = u^n}$ si $\boldsymbol{x = v^m}$. Apoi, daca graficul ***y = f(x)*** este o dreapta, atunci teoria care prezice aceasta dependenta este corecta pentru situatia fizica respectiva.

Atunci când nu cunoastem caracterul dependentei analizate, dar banuim ca aceasta s-ar exprima printr-o putere de un anumit ordin, vom folosi reprezentarea log - log. Alteori dependenta asteptata poate fi mai complicata. De exemplu, spatiul parcurs de un mobil sub actiune unei forte constante se poate scrie sub forma:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{20}$$

În acest caz nici reprezentarea ***s(t)***, nici $\boldsymbol{s(t^2)}$ nu conduce la o dreapta. Totusi, împartind ecuatia prin ***t*** vom avea:

$$\frac{s}{t} = v_0 + \frac{1}{2} a t \tag{21}$$

Reprezentând grafic dependenta $\frac{s}{t} = f(t)$ vom gasi atât viteza initiala (care este ordonata la origine), cât si acceleratia mobilului.

În cele mai multe situatii, când caracterul dependentei investigate nu este cunoscut, este nevoie de multa ingeniozitate si rabdare pentru gasirea metodei de liniarizare a dependentei studiate.

3. 4 Dependenta exponentiala sau logaritmica

Sunt multe situatii în fizica în care apar dependente de forma:

$$u = e^{Kv} \tag{22}$$

Logaritmând ecuatia (22), în baza ***e***, gasim:

$$\ln u = Kv \quad (\text{sau} \quad \lg u = 0{,}4343\, Kv)$$

O reprezentare ***log u = f(v)*** va conduce la o dreapta, care are panta K (sau 0,4343 K, daca se lucreaza în baza 10). Din motiv de spatiu, vom renunta aici la a da exemple numerice.

Cele discutate în sectiunea 3 pot fi rezumate prin urmatoarele:

Analiza grafica se dovedeste un mijloc pretios pentru cautarea relatiilor dintre marimile fizice masurate. Singura curba care poate fi identificata cu orice precizie este linia dreapta si eforturile trebuie îndreptate spre gasirea unei modalitati de reprezentare a acelei dependente sub forma unei drepte.

Daca marimile analizate sunt ***u*** si ***v*** atunci:

1) Daca graficul ***u = f(v)*** arata o împrastiere aleatoare punctelor, ***u*** nu este legat de ***v***.

2) Daca graficul ***u***(***v***) reprezinta o dreapta, dependenta respectiva este de forma ***u = a + b v***, unde ***a*** este ordonata la origine, iar ***b*** - panta. Daca ***b = 0***, ***u*** nu depinde de ***v***.

3) Daca dependenta ***u***(***v***) nu este o dreapta, o reprezentare ***log u = f(log v)*** constituie un test al unei dependente exprimate printr-o putere. Daca, în acest caz, graficul este o dreapta, dependenta este de tipul $u = a\, v^n$, unde ***n*** este panta dreptei, iar ***a*** este antilogaritmul ordonatei la origine.

4) Daca relatia este de forma exponentiala, $u = ae^{bv}$, graficul logaritmului unei marimi în functie de cealalta va fi o dreapta. Uneori este necesar sa o reprezinte si logaritmul celeilalte marimi, în functie de prima.

5) În unele cazuri teoria poate sugera tipul unei dependente. Experimentul va fi acela care permite verificarea acestei teorii.

4. Analiza numerica a datelor experimentale.

O analiza atenta arata ca datele numerice obtinute dintr-un experiment pot fi prelucrate sub forma în care sunt, fara a recurge la reprezentarea lor grafica. Cum am aratat, analiza grafica este o metoda intuitiva, rapida si mai putin laborioasa de a gasi o relatie, necunoscuta în prealabil, între variabilele respective. Totusi, exactitatea unui grafic este limitata. Este nevoie de grija deosebita în reprezentarea datelor, astfel încât eroarea de citire a datelor din grafic sa fie de ordinul a 1%.

Avantajul major al analizei numerice este acela al preciziei teoretic nelimitate a metodei. Precizia metodei depinde în întregime de precizia datelor si nu, ca în cazul metodei grafice, de exactitatea de constructie a graficului. Un alt avantaj al analizei numerice este acela ca eroarea rezultanta se poate gasi mai usor si mai rapid, în comparatie cu metoda grafica.

Cea mai simpla analiza este aceea în care variabilele $\boldsymbol{x}$ si y sunt direct proportionale, adica se gasesc în relatia $\boldsymbol{y = ax}$. Pentru a analiza datele se calculeaza raportul $a = \frac{y}{x}$. Deoarece rezultatele $\boldsymbol{y}_{\mathrm{i}}$ si $\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$ sunt afectate de erori de masura, vom gasi, în general, un sir diferit de valori:

$$a_1 = \frac{y_1}{x_1},\ a_2 = \frac{y_2}{x_2}, ...a_n = \frac{y_n}{x_n}$$

Daca nu se constata o anume tendinta de variatie a valorilor $\boldsymbol{a_i}$, o data cu modificarea valorilor $\boldsymbol{y}$ si $\boldsymbol{x}$, nu se poate înca afirma ca teoria este incorecta. Împrastierea valorilor sirului $\boldsymbol{a}_{\mathrm{i}}$ arata exactitatea cu care teoria respectiva este verificata de experiment, în conditiile date de efectuare a masuratorilor. De exemplu, daca abaterea medie fata de valoarea medie a lui $\boldsymbol{a}$ este de 1%, se spune ca relatia se dovedeste a fi verificata cu o eroare de 1%.

Ecuatia ce leaga pe $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{x}$ poate contine si alte constante, care pot fi (sau nu pot fi) determinate separat. Iata un procedeu de utilizat daca relatia $\boldsymbol{y = f(x)}$ este de forma $\boldsymbol{y = a\,x + b}$**:** Seria de citiri $\{x_i, y_i\}$ se introduce în ecuatiile:

$$y_1 = a\,x_1 + b$$
$$y_2 = a\,x_2 + b$$
$$y_3 = a\,x_3 + b$$

Daca se scad ecuatiile adiacente, vom avea:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

$$y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2) \Rightarrow \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a, \text{etc}.$$

Dupa ce s-a calculat valoarea medie a lui $\boldsymbol{a}$, folosind una din ecuatiile initiale se calculeaza $\boldsymbol{b}$.

În cazul în care forma ecuatiilor care descriu dependentele analizate este alta decât cea liniara se pot folosi alte combinatii dintre marimile masurate. Câteva exemple în acest sens sunt:

Daca $y = a\,x^2$, atunci se calculeaza $a = \frac{y}{x^2}$

Daca $y = b\,x^3$, atunci se calculeaza $b = \frac{y}{x^3}$

Daca $y = c\,x^{-2}$, atunci se calculeaza $c = y \cdot x^2$

si, în general, daca $y = d\,x^n$, se calculeaza rapoartele $\frac{y}{x^n} = d$.

Din analiza rezultatelor se poate constata daca dependentele respective sunt respectate. Este, de asemenea, posibil ca, folosind acest procedeu, sa poata fi aflata si valoarea exponentului ***n,*** dintr-o relatie de forma $y = a\,x^n$. Logaritmând ambii membri ai acestei ecuatii, obtinem:

$$\log y = \log a + n \log x$$

Un set de determinari experimentale ar trebui sa verifice ecuatiile:

$$\begin{aligned}
\log y_1 &= \log a + n \log x_1 \\
\log y_2 &= \log a + n \log x_2 \\
\log y_3 &= \log a + n \log x_3
\end{aligned}$$

Scazând ecuatii adiacente avem:

$$\begin{aligned}
\log y_2 - \log y_1 &= n(\log x_2 - \log x_1) \\
\log y_3 - \log y_2 &= n(\log x_3 - \log x_2)
\end{aligned}$$

sau:

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) &= n \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\
\log\left(\frac{y_3}{y_2}\right) &= n \log\left(\frac{x_3}{x_2}\right)
\end{aligned}$$

de unde:

$$n = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}, n = \frac{\log\left(\frac{y_3}{y_2}\right)}{\log\left(\frac{x_3}{x_2}\right)}, \ldots$$

O astfel de analiza permite nu doar determinarea lui ***n***, ci si evaluarea împrastierii rezultatelor în jurul unei valori medii (si, implicit, cât de precisa este valoarea lui ***n)***.

Metoda celor mai mici patrate

O abordare dintr-un alt punct de vedere permite ca, folosind analiza numerica sa putem afla o serie de marimi de interes. Aceasta abordare se numeste ***metoda celor mai mici patrate;*** ea urmareste sa rezolve ecuatia unei drepte care aproximeaza în modul cel mai bine datele experimentale.

Aceasta este, de fapt, o combinatie între metodele analizei numerice si grafice.

Asa cum am mentionat deja de un numar mare de ori, punctele experimentale nu se asaza aproape niciodata riguros pe o dreapta, din cauza ca masuratorile nu sunt întotdeauna perfecte. Graficul (linia dreapta) trebuie sa treac***a printre punctele experimentale***, astfel încât sa ramâna, pe cât posibil un numar egal de puncte de o parte si de alta a ei. Aceasta conditie este oarecum imprecisa: s-ar impune ca suma distantelor de la punctele respective sa tinda la o valoare minima (unele erori sunt prin lipsa, altele prin adaos si au, de aceea semne pozitive sau negative). Exprimat în alti termeni, este de dorit gasirea acelei drepte pentru care ***suma patratelor distantelor, în directia y, de la ea la punctele experimentale, sa fie minima,*** adica mai mica decât în cazul oricarei alte drepte. Metoda care foloseste acest rationament se numeste ***metoda celor mai mici patrate.***

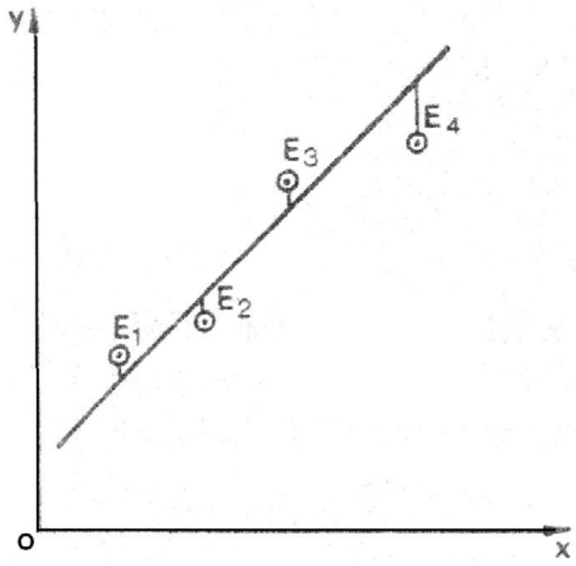

Fig. 9

Notând cu δ_i distantele, de-a lungul axei ***y***, de la punctele experimentale la dreapta a carei pozitie o cautam (Fig. 9), se impune ca suma patratelor distantelor sa fie minima:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \to \min$$

Sa consideram un set de ***n*** date experimentale:

$$(x_1, y_1),(x_2, y_2),\ldots(x_i, y_i),\ldots(x_n, y_n)$$

Fie ***y = ax + b*** ecuatia dreptei care trece printre aceste puncte.

Distanta dintre aceasta dreapta si punctul ***i*** este:

$$\delta_i = y_i - a x_i - b$$

Patratul acestei cantitati este:

$$\delta_i^2 = y_i^2 - 2a x_i y_i - 2b y_i + 2ab x_i + a^2 x_i^i + b^2$$

Conditia de minim a întregii sume:

$$S = \sum_i \left(y_i^2 - 2a x_i y_i - 2b y_i + 2ab x_i + a^2 x_i^2 + b^2 \right)$$

este ca derivata sa în raport cu ***a*** si ***b*** (care variaza daca construim dreapta având o orientare sau alta) sa se anuleze:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

deoarece variabilele ***a*** si ***b*** sunt independente.

Vom avea, ca urmare:

$$\begin{cases} \sum_i^n \left(ax_i^2 + bx_i - yx_i\right) = 0 \\ \sum_i^n \left(b - y_i + ax_i\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sum_i^n x_i^2 + b\sum_i^n x_i - \sum_i^n x_i y_i = 0 \\ nb - \sum_i^n y_i + a\sum_i x_i = 0 \end{cases}$$

Împartind ambele ecuatii prin ***n*** si tinând cont ca valorile medii sunt definite prin relatiile:

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \,, \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{si} \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}$$

sistemul de ecuatii precedent se poate scrie si ca:

$$\begin{cases} b - \overline{y} + a\overline{x} = 0 \\ b\overline{x}^2 - \overline{xy} - a\overline{x} = 0 \end{cases}$$

Panta dreptei va fi data, deci, de relatia:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

iar ordonata la origine va fi: $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

Daca, de exemplu, relatia dintre marimile $\boldsymbol{y}_\mathrm{i}$ si $\boldsymbol{x}_\mathrm{i}$ analizate este una exprimata printr-o putere de un anumit ordin, cantitatile ***y*** si ***x*** sunt logaritmii valorilor masurate, iar ***a*** - exponentul.

Daca relatia este o exponentiala, ***y*** va fi logaritmul uneia dintre marimile masurate, iar ***b*** - cealalta marime.

Coeficientul de corelatie liniara.

Am aratat în sectiunile precedente cum se poate verifica tipul de dependenta dintre marimile fizice, specifice fenomenul studiat. Se pune frecvent problema în ce masura o astfel de verificare (de multe ori denumita *fitare,* de la cuvântul englezesc *fitting*) corespunde unei dependente *reale, efectiv prezente*. Cu alte cuvinte, se pune problema în ce masura variatiile în valorile masurate ale unei marimi, *y,* sunt (sau nu) corelate cu variatiile unei alte marimi, *x*. De exemplu, daca vom masura dependenta de temperatura a perioadei micilor oscilatii ale unui pendul matematic, format dintr-un corp greu, de mici dimensiuni, suspendat de un fir metalic, vom constata ca exista o corelatie între aceste doua marimi, în timp ce, daca vom cauta o corelatie între perioada micilor oscilatii si timp, o astfel de dependenta reproductibila nu poate fi gasita.

Se poate introduce o marime care sa exprime *cantitativ* în ce masura putem presupune ca o anume dependenta (în cel mai frecvent întâlnite cazuri - cea liniara) exista într-adevar. Aceasta marime se numeste *coeficient de corelatie.* Cu referire la o dependenta liniara, acesta se numeste *coeficient de corelatie liniara.*

Fie un set de date experimentale formate din perechi de valori (x_i, y_i). Sa presupunem ca aceste date ar verifica o dependenta liniara:

$$y = ax + b \tag{23}$$

în care coeficientuul *a* se deduce din relatia:

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{24}$$

gasita în sectiunea precedenta.

Daca marimea *y* nu este corelata cu *x*, ea nici nu va creste, nici nu va scadea la orice variatie a lui *x*; ca urmare, dependenta *y(x)* va fi o dreapta orizontala, cu panta *a* = 0. Valoarea lui *a* nu poate, însa, doar ea, sa ne permita sa ne pronuntam cu certitudine asupra absentei oricarei corelatii: s-ar putea, uneori, sa existe, totusi, o dependenta liniara între *y* si *x*, *dar valoare pantei, a, sa fie foarte mica.*

Deoarece discutam de o relatie biunivoca dintre *y* si *x*, am putea, la fel de bine, sa consideram pe *x* ca fiind functie *y* si sa ne punem problema de a verifica în ce masura datele corespund unei dependente liniare de forma:

$$x = a' y + b' \tag{25}$$

în care coeficientii *a'* si *b'* difera, în general, de coeficientii *a* si *b* din relatia (23). O legatura între acesti coeficienti exista, în masura în care variabilele *x* si *y* sunt corelate. Expresia pantei inverse, *a'*, este similara aceleia a lui *a*:

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2} \tag{26}$$

Daca o corelatie între x si y nu exista, dependenta $x(y)$ va fi o dreapta, cu panta a'= 0 (ca si mai înainte, în cazul lui a).

Asa cum am aratat mai sus, daca y si x sunt corelate, exista o corelatie si între valorile coeficientilor a si b cu coeficientii a' si b'. Pentru a vedea care este aceasta relatie rescriem ecuatia (25) sub forma:

$$y = \frac{x}{a'} - \frac{b'}{a'} = ax + b \qquad (27)$$

Egalând coeficientii, rezulta:

$$a = \frac{1}{a'} \qquad b = -\frac{b'}{a'} \qquad (28)$$

Daca corelatia este completa, atunci aa' = 1, iar daca aceasta lipseste complet, atunci atât a, cât si a' sunt nule. Putem, prin urmare, introduce un coeficient de corelatie liniara, definit ca o masura a corelatiei liniare:

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}} \qquad (29)$$

Valoarea lui r este cuprinsa între 0 (în absenta corelatiei) si ± 1 (când marimile x si y sunt complet corelate). Semnul lui r este acelasi cu acela a lui a si a', însa doar modulul lui r este important.

Este necesar, la efectuarea lucrarilor de laborator, ca atunci când se foloseste metoda celor mai mici patrate pentru determinarea unor marimi fizice de interes, sa determinam si coeficientul r, ca o masura a corelatiei dintre variabila dependenta si cea independenta.