DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE FRECARE LA ALUNECARE PRINTR-O METODA DINAMICA

Scopul lucrării:

Asupra unui corp aflat în contact cu un alt corp aflat în mișcare acționează o forță de frecare ce poate imprima primului corp o mișcare accelerată. Cunoscând expresia forței de frecare se poate obține, aplicând principiul al doilea al dinamicii, ecuația diferențială a mișcării. Deoarece în expresia forței de frecare intervine și coeficientul de frecare la alunecare, rezultă că soluția ecuației diferențiale a mișcării poate fi utilizată pentru determinarea coeficientului de frecare.

În lucrarea de față se obține, prin rezolvarea ecuației diferențiale a miscarii unui corp asupra căruia acționează această forță, o relație ce leagă coeficientul de frecare de alte mărimi direct măsurabile. Se poate calcula astfel valoarea coeficientului de frecare la alunecare.

Descrierea dispozitivului experimental.

Dispozitivul experimental utilizat constă din doi cilindri metalici, *A* și *B*, ce se rotesc în sensuri opuse (Fig. 1). Axele celor doi cilindri sunt orizontale. Cilindrii sunt prevăzuți cu șanțuri în care se așează o bară metalică C având secțiune circulară.

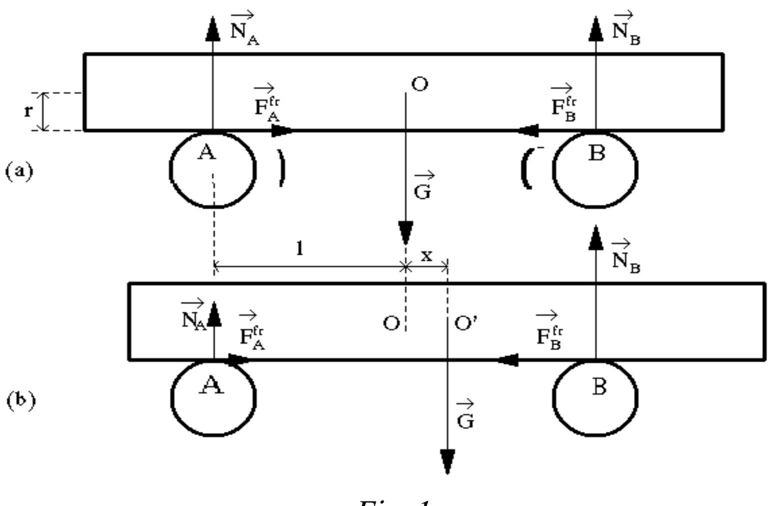

Fig. 1

Considerații teoretice.

Asupra particulelor constituente ale acesteia acționează forța de atracție gravitationala din partea Pamantului. Dacă notăm cu *dm* masa unei atfel de particule infinitezimale, atunci forța resimtita de fiecare este *dG*. Cum accelerația $\vec{g}$ este un vector constant pentru toate particulele ce formează corpul rigid, rezultă că asupra corpului acționează, de fapt, un număr foarte mare de forțe paralele între ele, forța rezultantă fiind dată de relația:

$$\vec{F} = \int_V \vec{g}dm = m\vec{g}$$

unde *m* este masa corpului *C*.

Forțele paralele elementare *dmg* imprimă corpului C doar o mișcare de translație. De aceea, forța rezultantă (care trebuie să aibă același efect ca și totalitatea forțelor paralele elementare) trebuie sa aiba punctul de aplicație într-un anumit punct; față de care suma momentelor de rotație este egală cu zero. Vom putea scrie, deci:

$$\int_V \vec{r} \times (dm)\vec{g} = 0$$

Punctul amintit mai sus se numeste *centrul de masă, CM.* În cazul unui corp omogen, CM se află în centrul de simetrie al acestuia. În Fig.1 centrul de masă este notat cu *O*.

Dacă, inițial, bara C este așezată pe cei doi cilindri *A* și *B,* astfel încît verticala ce trece prin *O* intersectează *la mijloc* distanța dintre cei doi cilindri, atunci forțele de apăsare cu care bara acționează, datorită greutății, asupra cilindrilor vor fi egale între ele. Ținând seama că forțele de frecare sunt proporționale cu forțele de apăsare, $F^{fr} = \mu N_A = \mu N_B$, rezultă că *și forțele de frecare sunt egale*. Rezultanta acestor forțe fiind egală cu zero, corpul se va menține în repaus.

Dacă, însă, datorită unei cauze oarecare, se produce o deplasare a barei *C*, astfel încât centrul de masă al acesteia ajunge în poziția indicată în Fig.1 cu *O'*, atunci forța de apăsare asupra lui *B* devine mai mare față de forța de apăsare cu care bara acționează asupra cilindrului A. Datorită sensului de rotație al cilindrului *B*, forța de frecare $F_B^{fr} = \mu N_B$ va deplasa corpul spre poziția inițială. Obținând o anumită viteză, bara depășește, datorită inerției, poziția inițială, ceea ce face ca forța de frecare la contactul cu cilindrul A să devină mai mare, astfel că apare un efect de frânare și apoi de accelerare în sens invers. Bara *C* va executa, ca urmare, o mișcare oscilatorie pe orizontală. Cele două forțe de frecare ce acționează la suprafața de contact cu cilindrii *A* și *B* au sensuri opuse, astfel încât, conform principiului al doilea al dinamicii, se poate scrie:

$$F_A^{fr} - F_B^{fr} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$

unde *m* este masa barei *C,* iar d^2x/dt^2 este accelerația obținută de aceasta sub acțiunea rezultantei $F_A^{fr} - F_B^{fr}$. Expresia acestei rezultante poate fi găsită considerând Fig. 1b.

Asupra barei acționează forțele: $\vec{G}, \vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{F}_A^{fr}, \vec{F}_B^{fr}$. Deoarece bara nu se rotește, momentul rezultat al forțelor menționate trebuie să fie nul.

Scriind echilibrul momentelor în raport cu punctul *O* se obține:

$$N_A l + F_B^{fr} r + Gx = F_A^{fr} r + N_B l \qquad (2)$$

În relația (1) ținând cont că $N_A = F_A^{fr} / \mu$, respectiv $N_B = F_B^{fr} / \mu$ vom putea calcula diferența $F_A^{fr} - F_B^{fr}$:

$$F_A^{fr} - F_B^{fr} = -\frac{mg}{l/\mu - r} x \qquad (3)$$

Date fiind dimensiunile barei, în cazul nostru $mg / (\frac{l}{\mu} - r) > 0$.

Relația (3) arată că rezultanta forțelor ce acționează pe orizontală este proporțională cu deplasarea barei cilindrice față de poziția de echilibru și îndreptată către *O*; ea este de fapt o *forță cvasielastică*.

Înlocuind (3) în (1) găsim:

$$\ddot{x} + (\frac{g}{l/\mu - r}) x = 0 \qquad (4)$$

Deoarece termenul din paranteză este pozitiv, vom face notația:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l/\mu - r}$$

în care semnificația lui ω_0, o vom discuta mai târziu. Ecuația (4) devine:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (5)$$

Rezolvarea ecuației diferențiale a mișcării

Pentru a rezolva ecuația diferențială a mișcării, vom testa o soluție de tip exponențial (de forma $x = ae^{\lambda t}$). Calculând valorile derivatei de ordinul I și II, $\dot{x}$ și $\ddot{x}$, ale acestei soluții și înlocuindu-le în (5) obținem:

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) ae^{\lambda t} = 0 \qquad (6)$$

Cum pe noi ne interesează soluția ne-nulă a ecuației diferențiale, rezultă că:

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0 \qquad (7)$$

Rădăcinile ecuației algebrice (7) sunt: $\lambda_1 = -\sqrt{-1}\omega_0 = -j\omega_0$ și $\lambda_2 = +\sqrt{-1}\omega_0 = +j\omega_0$

Soluția generală a ecuației diferențiale (5) va fi o combinație liniară a soluțiilor particulare, având, deci, forma:

$$x = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$$

în care *a* și *b* sunt două constante care, din punct de vedere matematic, pot avea orice valoare. Din punct de vedere fizic, aceste două constante trebuie să aibă valori bine determinate (găsirea lor se face apelând la așa numitele *condiții inițiale,* adică poziția și viteza corpului la $t_0 = 0$).

Ținând cont de expresiile găsite pentru λ_1, respectiv λ_2, soluția generală are forma:

$$x = ae^{-j\omega_0 t} + be^{+j\omega_0 t} \qquad (8)$$

Ecuația (8) poate fi adusă la o altă formă dacă se exprimă cantitățile $e^{-j\omega_0 t}$, respectiv $e^{+j\omega_0 t}$, folosind relațiilor lui Euler:

$$x = (a+b)\cos\omega_0 t + j(a-b)\sin\omega_0 t$$

sau:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (9)$$

unde au fost introduse notațiile:

$$(a+b) = A\cos\varphi_0$$
$$j(a-b) = A\sin\varphi_0$$

Se vede că soluția, *x*, a ecuației diferențiale a mișcării (5), scrisă sub forma (9) este ecuația unei mișcări oscilatorii armonice, ω_0 fiind *pulsația mișcării oscilatorii.* În expresia (7) apar constantele A și φ_0, analoage lui *a* și *b* din (9), ce pot fi determinate din condițiile inițiale.

Modul de lucru

Pentru determinarea coeficientului de frecare se parcurg urmatoarele etape:

❶se măsoară distanța *2l* dintre axele celor doi cilindri, precum și raza *r* a barei;

❷Se măsoară perioada T_0 a mișcării oscilatorii a barei, alegând un număr de oscilații care se efectuează într-un interval de timp de cel puțin 40 s;

❸Se completează cu date Tabelul 1, coeficientul de frecare μ calculându-se folosind relația:

$$\mu = \frac{l}{r + T_0^2 g / 4\pi^2}$$

Tabelul 1

Determinarea coeficientului de frecare la alunecare

Nr. det.	l (cm)	r (cm)	t (s)	T (s)	μ
1					
2					
...					

❹Se repetă operațiile precedente, în cazul celorlalte bare existente.

❺Se efectuează calculul erorilor.