

# STUDIUL MISCARII DE PRECESIE A UNUI GIROSCOP

## Scopul lucrării

În lucrare se studiază mișcarea de rotație executată de un corp rigid ce posedă o axă de simetrie, în jurul acestei axe, în condițiile în care el se află într-un câmp de forțe exterior (gravitațional). Acest corp, denumit giroscop simetric, poate executa, în general, printr-o fixare corespunzătoare pe suportul său, pe lângă mișcarea sus-menționată, o mișcare de precesie și o mișcare de nutație.

Una din caracteristicile cele mai interesante ale mișcării giroscopului simetric este aceea că rezultatul acțiunii unei forțe externe îl constituie apariția unei mișcări care se desfășoară într-un plan perpendicular pe dreapta suport a forței-cauză. Acest comportament este diferit față de acela care se poate observa în cazul mișcării de translație, când forța-cauză și accelerația-efect sunt doi vectori coliniari.

## Considerații teoretice

Să atașăm giroscopului un sistem de axe de coordonate, care are originea în centrul său de masă, iar axa  $Oz_{SCM}$  - chiar axa de simetrie a giroscopului (Fig. 1).

Poziția unui punct material din volumul giroscopului poate fi precizată, de asemenea, prin trei unghiuri:  $\theta$  (dintre axa de simetrie a giroscopului și axa  $Oz$  a sistemului de coordonate al laboratorului),  $\phi$  (dintre aceeași axă și  $Ox$ ) și  $\psi$  (dintre raza vectorială a acestui element de masă și o direcție de referință din același plan perpendicular pe  $Oz_{SCM}$ ).

În acest mod, un element de traiectorie,  $ab$ , descrisă de elementul de masă,  $dm$ , poate fi interpretat ca rezultatul a 3 rotații succesive, independente: o rotație în jurul axei de simetrie,  $ac$ , în decursul căreia variază numai  $\psi$ , urmată de o nouă rotație,  $cd$ , în care variază numai  $\theta$  și, în sfârșit o rotație în jurul axei  $Oz$ ,  $db$ , în care variază numai  $\phi$ .

Notând cu  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  - vitezele unghiulare corespunzătoare celor trei mișcări, viteza unghiulară instantanee,  $\omega$ , va avea expresia:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \cdot \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \cdot \hat{e}_\phi + \dot{\psi} \cdot \hat{e}_\psi \quad (1)$$

Dacă vom studia *exclusiv mișcarea de precesie*, cu alte cuvinte în condițiile absenței nutației, atunci  $\dot{\theta} = 0$ ; ținând cont că viteza unghiulară de rotație în jurul axei de simetrie  $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$ , putem aproxima pe  $\omega$  prin relația:

$$\vec{\omega} \cong \dot{\psi} \cdot \hat{z}_{scm} \quad (2)$$

În această aproximație, vectorul moment unghiular,  $\vec{J} = I_z \vec{\omega}$ , este un vector având dreapta suport chiar axa de simetrie a giroscopului.

Aplicând teorema variației momentului unghiular pentru întreg rigidul, în condițiile în care momentul rezultat al forțelor exterioare este datorat greutateii corpului suplimentar de masă  $m$ , atârnat de tijă, vom avea:

$$\vec{r} \times m\vec{g} = \frac{d}{dt}(\vec{J}_{cm} + \vec{J}_{scm}) \cong \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cdot I_z \cdot \hat{z}_{scm})s \quad (3)$$

deoarece, în condițiile experimentului, momentul cinetic orbital al centrului de masă  $\vec{J}_{cm}$  este mult mai mic decât momentul cinetic intern  $\vec{J}_{scm} = \dot{\psi} \cdot I_z \cdot \hat{z}_{scm}$ .

Precizăm că momentul forței de greutate în raport cu punctul  $N$  este un **vector având dreapta suport orizontală**.

În Fig. 2 sunt reprezentate două poziții succesive ale vectorului moment cinetic  $\vec{J}(t)$  și  $\vec{J}(t+dt)$ . Dacă, la momentul  $t$ , axa giroscopului este orizontală ( $\vec{J}(t)$  este în planul  $xOy$ ) și dacă ținem cont de unul din aspectele ilustrate de ecuația (3), anume că vectorul diferență  $d\vec{J}$  este **coliniar cu vectorul moment al forței de greutate**, rezultă că și  $\vec{J}(t+dt)$  **trebuie să fie orizontal**.

În decursul mișcării de precesie se modifică **doar orientarea** momentului unghiular al giroscopului, modulul său rămânând constant. Deoarece momentul forței exterioare rămâne prezent și după momentul  $t + dt$ , acesta va determina o nouă rotație a ansamblului într-un plan perpendicular pe cel determinat de versorii  $\hat{z}_{SL}$  și  $\hat{z}_{SCM}$  (deci în plan orizontal), adică **mișcarea de precesie în plan orizontal**.

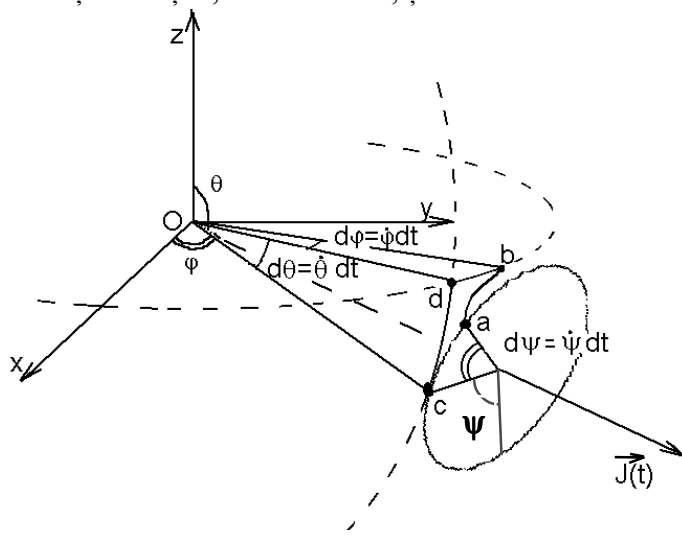


Fig. 1

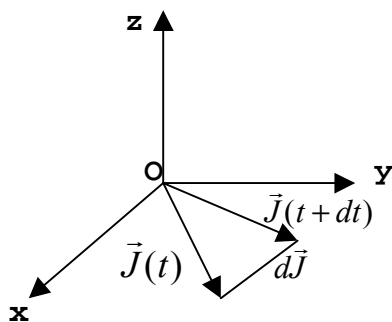


Fig.2

Ținând cont de relația (3), din Fig. 2 rezultă că variația momentului unghiular, produsă în intervalul  $dt$  se poate exprima astfel:

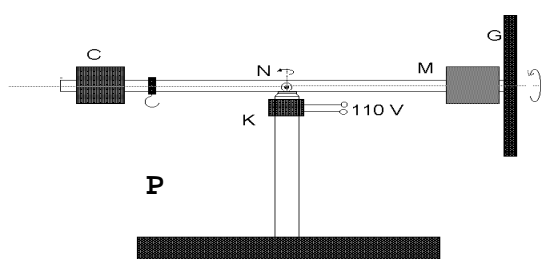
$$d\vec{J}_{scm} = \dot{\phi} \cdot dt \cdot \hat{z}_{sl} \times \vec{J}_{scm} = \dot{\phi} \cdot dt \cdot \hat{z}_{sl} \times \psi \cdot I_z \cdot \hat{z}_{scm} = (\vec{r} \times m\vec{g})dt \quad (4)$$

Deoarece  $\hat{z}_{sl} \perp \hat{z}_{scm}$ , iar  $\vec{r}_{cm} \perp \vec{g}$  (mișcarea de precesie efectuându-se în planul orizontal) rezultă:

$$\dot{\phi} = \frac{r \cdot mg}{\psi \cdot I_z} \quad (5)$$

### Descrierea dispozitivului experimental

Dispozitivul experimental este prezentat în Fig. 3. Giroscoful propriu-zis,  $G$ , este un disc cilindric din textolit, montat pe axul motorului electric  $M$ , care, la rîndul



**Fig.3**

său, este montat solidar pe o tijă ce poartă la celălalt capăt o contra-greutate  $C$ . O articulație,  $N$ , permite atât rotația în plan vertical, cât și orizontal a ansamblului. Pe suportul aceluiași ansamblu se găsește, de asemenea, un sistem de contacte electrice alunecătoare,  $K$ , prin care

se alimentează motorul  $M$ .

La începutul experimentului se reglează poziția contra-greutății  $C$ , astfel ca tija de susținere a ansamblului motor - giroscof să fie orizontală.

Mișcarea de precesie (în plan orizontal) a giroscofului poate fi declanșată dacă asupra sa, ori a tijei de susținere se exercită o forță verticală (de exemplu, agățînd într-un punct,  $P$ , pe axa giroscofului, o greutate suplimentară).

### Modul de lucru

- ❶ Se măsoară masele corpurilor ce urmează a fi utilizate în experiment;
- ❷ Se alimentează motorul electric și se așteaptă atingerea turației de regim;
- ❸ Păstrînd o valoare constantă a lui  $r$ , se agață de cârligul prevăzut în acest scop corpurile de diverse mase;
- ❹ Se determină vitezele unghiulare de precesie  $\dot{\phi} = 2\pi / T$ , măsurînd, în acest scop perioada de rotație.
- ❺ Datele experimentale se trec în Tabelul 1

**Tabelul 1**  
**Studiul mișcării giroscopului simetric**

Nr. det.	$r$ (cm)	$m$ (g)	$m/\dot{\phi}$ (kg s/rad)	$r/\dot{\phi}$ (m s/rad)
1				
2				
...				

⑥ Deoarece  $r$ ,  $I_z$  și  $\dot{\psi}$  sunt constante în timp, se verifică constanța raportului:

$$\frac{m_1}{\dot{\phi}_1} = \frac{m_2}{\dot{\phi}_2} = \dots = const. \quad (6)$$

⑦ Se păstrează constantă masa și se modifică poziția punctului de agățare,  $r$ ;

⑧ Se verifică constanța raportului:

$$\frac{r_1}{\dot{\phi}_1} = \frac{r_2}{\dot{\phi}_2} = \dots = const. \quad (7)$$

➤ **Observație**

Având în vedere faptul că:

$$I_z = I_G + I_M \quad (8)$$

unde  $I_G$  și  $I_M$  sunt momentele de inerție în raport cu axa de simetrie ale giroscopului și, respectiv, rotorului motorului electric, se poate determina momentul de inerție al rotorului motorului electric,  $I_M$ , folosind ecuația (5) și cunoscându-se că:

$$I_G = \int_V r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{m_d R^2}{2}. \quad (9)$$

Ținând cont de (5), (8) și (9) rezultă că:

$$I_M = \frac{r \cdot mg}{\dot{\phi}\dot{\psi}} - \frac{m_d R^2}{2} \quad (10)$$

unde viteza unghiulară de rotație în jurul axei proprii a giroscopului se măsoară cu stroboscopul, iar masa discului - giroscop  $m_d = 0,8$  kg.