

Introducere în analiza Fourier

I. **Scopul lucrării** este de a înțelege noțiuni precum *serie Fourier*, *spectrul de amplitudine* al unui semnal, *analiză spectrală*.

II. Noțiuni teoretice

Orice funcție periodică, $f(t) = f(t+T)$, poate fi scrisă ca o sumă infinită de oscilații armonice sinusoidale, fiecare cu frecvențe egale cu multipli întregi ai unei frecvențe minime, denumită *frecvența fundamentală*, conform relației:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (1)$$

Componentele care apar în sumele din relația (1) se numesc *armonici*. Coeficienții a_n și b_n se determină prin integrarea pe durata unei perioade a expresiei ce rezultă din înmulțirea relației (1) cu $\cos n\omega t$, respectiv $\sin n\omega t$, adică:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \cdot dt \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t \cdot dt \quad (4)$$

Ca urmare, un semnal periodic poate fi exprimat ca o combinație liniară de armonici, ale caror frecvențe sunt multipli întregi ai fundamentalei, adică printr-o *serie Fourier*. Reprezentarea în domeniul frecvență a acestei suprapunerii de componente periodice se numește *spectrul de amplitudine* al semnalului. Determinarea intensității relative a componentelor de diferite frecvențe poartă denumirea de *analiză spectrală*.

Funcția $f(t)$ poate fi dezvoltată în serie Fourier și sub forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (5),$$

$$\text{unde } C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ și } \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

Exemple de funcții periodice și seriile Fourier corespunzătoare:

1. Funcție pătratică

$$f(x) = \begin{cases} -b, & \text{dacă } -\pi < x < 0 \\ b, & \text{dacă } 0 < x < \pi \end{cases}, \text{ dezvoltată în serie Fourier are expresia}$$

$$f(x) = \frac{4b}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

2. Funcția triunghi

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x, & \text{dacă } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}, \text{ dezvoltată în serie Fourier are expresia}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

3. Funcția rampă (dinte de ferestrău)

$f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = x$, dezvoltată în serie Fourier are expresia

$$f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

III. Modul de lucru

1. Folosind un generator de semnal, un diapazon, interfața LabPro, senzorul de tensiune și microfonul, împreună cu programul LoggerPro se va face analiza în domeniul frecvenței a diferitor tipuri de semnale.
2. Se conectează senzorul de tensiune între generatorul de semnal și interfața LabPro. Se deschide aplicația „generator” aflată pe Desktop. Se vor folosi semnale de tip sinusoidal, pătratic și triunghiular, pentru două frecvențe (50 Hz și 100 Hz). Se vor nota coeficienții Fourier corespunzători diferitelor armonici din spectru și se va vedea dacă raportul valorilor acestora sunt conforme cu observațiile teoretice (vezi „exemple de funcții periodice și seriile Fourier corespunzătoare”).
3. Se închide aplicația „generator”, se deconectează generatorul și senzorul de tensiune .
4. Se conectează microfonul la interfața LabPro. Se deschide aplicația „diapazon” de pe Desktop. Se înregistrează sunetul emis de diapazon și se citește din spectru frecvența fundamentală emisă de acesta.
5. Se închide aplicația „diapazon” și se lansează aplicația „voce”. Studentul / studenta va încerca să înregistreze o notă muzicală cântată de propria sa voce. Din spectru “va vedea” cât de armonică îi este vocea.
6. Se lansează de pe desktop programul „MacScope”. Folosind meniul File/Create Math Wave se pot genera diferite tipuri de semnale.
7. Pentru fiecare tip de semnal de va face analiza Fourier: se selectează o perioadă a semnalului (folosind click stânga al mouse-lui), se apasă butonul Fourier și se observă informațiile oferite de program.
8. Se lansează aplicația „sinteza Fourier” de pe Desktop și se observă, pentru diferitele tipuri de semnale, informațiile legate de analiza spectrală. De asemenea se pot genera diferite semnale suprapunând sunete armonice de frecvențe bine definite.