STUDIUL MISCARII OSCILATORILOR CUPLATI

Scopul lucrării

În această lucrare se studiază mișcarea efectuată de două sisteme oscilante (două pendule elastice), cuplate între ele prin intermediul unui resort. Se verifică rezultatele prezise de modelul teoretic discutat și se pune în evidență apariția fenomenului de bătăi. Se determină constantele elastice ale celor trei resorturi

Principiul fizic al metodei

După cum este cunoscut, prin *pendul elastic* se înțelege un sistem fizic, capabil să excute oscilații armonice sub acțiunea unei forțe elastice. Cel mai simplu pendul elastic se realizează dintr-un resort, *P,* care are capătul superior fixat, iar de celălalt se atârnă un corp greu, *M* (Fig. 1). Forța elastică ia naștere în resort o dată cu deformarea acestuia; resortul și corpul *M* alcătuiesc sistemul fizic capabil să oscileze. Înainte de a suspenda corpul *M*, capătul liber al resortului se află în punctul *O* (Fig. 1a).

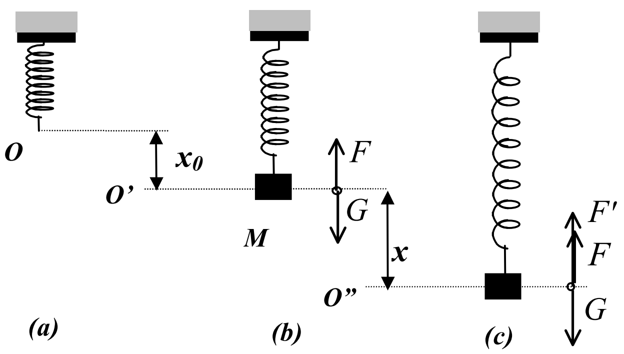

Fig.1

Sub acțiunea forței de greutate $G = mg$, resortul se alungește, capătul său deplasându-se în punctul *O* aflat la distanța x_0 de punctul *C*. Datorită deformării elastice, în resort ia naștere forța $F = -kx_0$, unde k este constanta elastică a resortului. Deoarece toate forțele acționează după aceeași direcție, relația dintre ele se poate scrie sub formă scalară.

În noua poziție de echilibru, între cele două forțe există relația:

$$F - G = 0 \qquad (1)$$

Acționând cu o forță suplimentară în jos, astfel încât capătul resortului să se deplaseze în punctul *O"*, aflat la distanta x de punctul *O'*, în resort va lua naștere o forță elastică suplimentară $F' = -kx$. Înlăturând forța care a produs noua deformare a resortului, asupra corpului de masă *M* vor acționa trei forțe (Fig. 1c) astfel încât ecuația de mișcare se poate scrie:

$$ma = F + F' - G \tag{2}$$

Ținând seama de relația (1) ecuația diferențială de mișcare a corpului se scrie sub forma:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{3}$$

Relația (3) reprezintă ecuația diferențială a mișcării oscilatorului armonic care execută oscilații neamortizate; pulsația proprie este dată de relația:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

Ecuația mișcării oscilatorii este de forma:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{5}$$

unde A și φ sunt două constante (amplitudinea și faza) care se determină din condițiile inițiale, specificate prin poziția x_0 și prin viteza v_0, ambele mărimi specificate la momentul $t = 0$.

Dacă considerăm că la momentul inițial pendulul este lăsat să oscileze liber ($v_0 =$ $= 0$) dintr-un punct O'' aflat la distanța x_{01} de poziția de echilibru, atunci înlocuind în (5) rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_{01} = A\cos\varphi \\ 0 = -A\omega_0 \sin\varphi \end{cases} \tag{6}$$

Rezolvând acest sistem, obținem ecuația de mișcare:

$$x = x_{01}\cos\omega_0 t \tag{7}$$

Să presupunem că avem două astfel de sisteme oscilante. Dacă prin intermediul unei legături oarecare, fiecare oscilator acționează asupra mișcării celuilalt, spunem că sistemele sunt cuplate, iar oscilațiile efectuate în aceste condiții se *numesc oscilații cuplate.* Se pot forma diferite sisteme cuplate care să conțină cel puțin doi oscilatori. În laborator vom folosi un sistem (Fig. 2) format din două pendule elastice identice P_1 și P_2 (de masă m și constantă elastică k) ca și cel descris mai sus, dispuse vertical. În absența oricărei legături între cele două pendule, dacă acestea sunt scoase din poziția de echilibru, ele vor executa oscilații libere, independente, cu pulsația dată de ecuația (4).

Dacă, însă, legăm pendulele între ele prin intermediul unui al treilea resort P_{12}, de constantă elastică k_{12}, pendulele elastice își vor inflența reciproc mișcarea. În poziția de echilibru a corpurilor M_1 și M_2, suma tuturor forțelor care acționează asupra fiecărui corp în parte, este zero. Deplasând corpul M_1 pe o distanță $x_1$iar corpul M_2 pe o distanțăx_2, în sistem vor apare forțe elastice suplimentare care tind să readucă corpurile la poziția de echilibru (Fig. 3). Forța F_{12} este forța elastică ce se dezvoltă în resortul de cuplaj. Asupra corpului M_1 va acționa forța rezultantă:

$$F' = F_1 - F_{12} = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \tag{8}$$

iar asupra corpului M_2, forța rezultantă:

$$F'' = F_2 + F_{12} = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \tag{9}$$

Conform principiului fundamental al mecanicii, aceste forțe vor produce accelerații corespunzătoare, astfel încât putem scrie ecuația diferențială a mișcării pentru fiecare corp, sub forma:

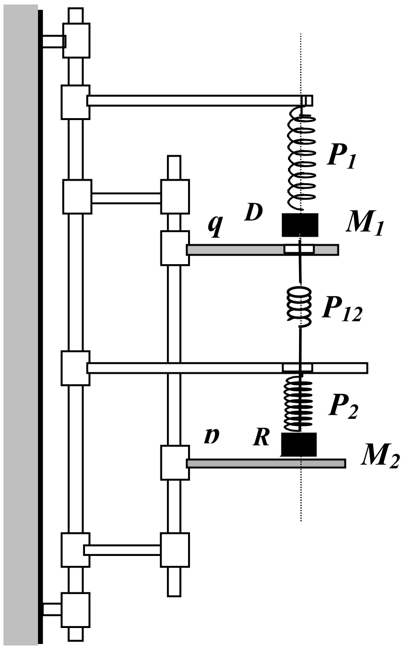

Fig. 2

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}_1 - kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ &m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{10}$$

Pentru a găsi valorile lui x_1 și x_2 care să satisfacă aceste relații, adunăm și scădem ecuațiile sistemului (10). Făcând notațiile: $x_2 + x_1 = X$, $x_2 - x_1 = Y$ (11)

obținem un sistem de ecuații decuplate:

$$\begin{aligned} &m\ddot{X} + kX = 0 \\ &m\ddot{Y} + (k + 2k_{12})Y = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

având soluțiile de forma:

$$X = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \tag{13}$$

$$Y = B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{14}$$

în care:

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} \tag{15}$$

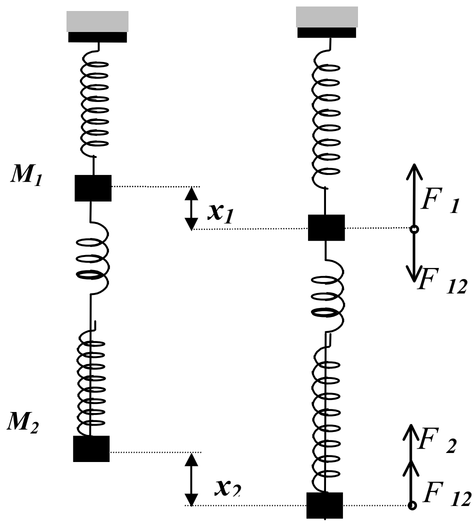

Fig. 3

Valorile constantelor de integrare A, B, φ_1, φ_2, se determină din valorile coordontetelor și vitezelor celor două corpuri la momentul inițial, $t = 0$. Presupunând că aceste valori sunt: $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $v_{10} = 0$, $v_{20} = 0$, atunci din relațiile (11), (13) și (14) rezultă următorul sistem:

$$\begin{cases} x_{10} + x_{20} = A\cos\varphi_1 \\ x_{10} - x_{20} = B\cos\varphi_2 \\ 0 = -\omega_1 A\sin\varphi_1 \\ 0 = -\omega_2 B\sin\varphi_2 \end{cases} \tag{16}$$

Rezolvând acest sistem și revenind la substituția făcută în (11), se obțin ecuațiile de mișcare pentru cele două corpuri:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_{10} + x_{20}}{2}\cos\omega_1 t - \frac{x_{20} - x_{10}}{2}\cos\omega_2 t \\ x_2 &= \frac{x_{10} + x_{20}}{2}\cos\omega_1 t + \frac{x_{20} - x_{10}}{2}\cos\omega_2 t \end{aligned} \tag{17}$$

Din forma acestor soluții, se observă că, în general, mișcarea fiecărui corp reprezintă o suprapunere a două oscilații armonice de pulsații ω_1 și ω_2. Din mulțimea de cazuri particulare posibile vom studia doar două.

a) $x_{10} = x_{20} = a$ (adică la momentul inițial corpurile M_1 și M_2 sunt egal depărtate de pozițiile lor de echilibru și în același sens).

Din sistem de ecuații (17) rezultă:

$$x_1 = x_2 = a\cos\omega_1 t = a\cos\omega_0 t \tag{18}$$

Cele două corpuri execută oscilații în fază, ca și cum prezența legăturii dintre ele nu ar influența cu nimic mișcarea lor. Aceste oscilații sunt identice cu cele ale oscilatorilor independenți, exprimate prin ecuația (7).

b) $x_{10} = 0$, adică la momentul $t = 0$ corpul M_1 se află în poziția de echilibru. În acest caz:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_{20}}{2}\cdot\cos\omega_1 t - \frac{x_{20}}{2}\cdot\cos\omega_2 t \\ x_2 &= \frac{x_{20}}{2}\cdot\cos\omega_1 t + \frac{x_{20}}{2}\cdot\cos\omega_2 t \end{aligned} \tag{19}$$

Folosind relațiile trigonometrice de transformare a sumei și diferenței a două funcții trigonometrice în produse obținem:

$$x_1 = x_{20}\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$
$$x_1 = x_{20}\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \qquad (20)$$

sau încă:

$$x_1 = x_{20}\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$x_2 = x_{20}\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)-\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \qquad (21)$$

Din acest sistem se vede că cele două corpuri execută oscilații de aceeași pulsație $\left(\omega=\left(\omega_1+\omega_2\right)/2\right)$ dar nearmonice; amplitudinile acestor oscilații:

$$\left[x_{20}\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)\right],\quad \left[x_{20}\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right] \qquad (22)$$

variază periodic în timp. Termenul $\pi/2$ ne arată că atunci când amplitudinea unui corp este maximă, amplitudinea celuilalt este zero și invers. Fiecare corp execută oscilații a căror amplitudine variază periodic de la zero la o valoare maximă, apoi la zero și așa mai departe. Un astfel de fenomen este cunosut sub denumirea de *bătăi.* Timpul scurs între două momente când amplitudinea este maximă poartă denumirea de *perioada bătăilor*. Notând cu T' perioada bătăilor, putem scrie pentru două maxime consecutive:

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t = k\pi \quad \text{și} \quad \frac{\omega_2-\omega_1}{2}\left(t+T'\right)=\left(k+1\right)\pi \qquad (23)$$

Scăzând, membru cu membru, prima relație din ultima, obținem:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1} \qquad (24)$$

Pornind de la aceste considerații, vom determina în laborator valorile constantelor de elasticitate k și k_{12}.

Descrierea dispozitivului experimental și a modului de lucru

Dispozitivul este alcătuit dintr-un suport vertical (Fig. 2) de care se prind resorturile P_1 și P_2 și din bara *B*, de care se fixează măsuțele *p* și *q*. Spiralele de care sunt suspendate corpurile M_1 și M_2 sunt prinse în punctele D și R, iar între ele se află resortul de cuplaj P_{12}.

1. Determinarea constantei k

❶ se verifică verticalitatea sistemului și a axei care trece prin cele trei resorturi;

❷ se reglează măsuțele p și q, astfel încât ele să nu atingă corpurile M_1 și M_2 aflate în poziția de echilibru;

❸ se ridică bara B împreună cu măsuțele cu aproximativ 4cm și se fixează în această poziție;

❹ se verifică dacă la căderea barei B, măsuțele nu ating resortul din mijloc;

❺ se lasă liberă bara B să alunece în jos;

❻ se determină experimental perioada oscilațiilor sincrone a celor două corpuri;

❼ se completează Tabelul 1 și se calculează constanta elastică cu ajutorul formulei:

$$k = \frac{4\pi^2}{T_0^2} m = \frac{4\pi^2}{t^2} n^2 m \tag{25}$$

Tabelul nr.1

Determinarea constantei elastice a resorturilor

Nr.det	m (g)	n	t (s)	k (N/m)	Observații
1.					
2.					
...					

2. Determinarea constantei de cuplaj k_{12}.

Pentru a găsi valoarea constantei de cuplaj trebuie să determinăm mai întâi pulsația ω_2 din relația $\omega_2 = \omega_0 + \omega^{'}$ (deorece $\omega_0 = \omega_1$, vezi (18)). Ca urmare, trebuie să găsim valoarea lui $\omega^{'}$ (adică pulsația bătăilor). În acest scop procedăm după cum urmează:

❶ se deplasează măsuțele p și q de sub greutăți, lăsând sistemul în echilibru;

❷ se verifică dacă resortul P_{12} nu este cumva deformat;

❸ se deplasează în jos corpul M_2 pe o distanță de câtiva centimetri și apoi se lasă liber;

❹ în sistem vor apare bătăi cu pulsația $\omega^{'}$ care se determină experimental ($\omega^{'} = 2\pi n^{'}/t^{'}$ unde $n^{'}$ este numărul de bătăi, adică numărul de zerouri ale amplitudinii de oscilație, care se produc în intervalul de timp $t^{'}$.

❺ se calculează constanta de cuplaj din relația:

$$k_{12} = \frac{\omega_2^2 m - k}{2} = \left(\omega_0 + \omega'\right)^2 \frac{m}{2} - \frac{k}{2} = 2\pi^2 m\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right)^2 - \frac{k}{2} \tag{26}$$

sau:

$$k_{12} = 2\pi^2 m \frac{n'}{t'}\left(2\frac{n}{t} + \frac{n'}{t'}\right) \tag{27}$$

la care am ajuns înlocuind pe k cu valoarea dată de (25).

➢Observație

Dacă se fixează măsuța p sub corpul M_1 se poate lucra numai cu resorturile P_{12} și P_2. Se poate găsi ușor, scriind ecuația de mișcare a corpului M_2, că pulsația oscilațiilor executate de M_2 în acest caz va fi:

$$\omega'' = \left(\frac{k + k_{12}}{m}\right)^{1/2} \quad \text{unde} \quad \omega'' = \frac{2\pi}{T''} \tag{28}$$

În acest fel, se poate afla printr-un alt procedeu constanta k_{12} determinând experimental perioada $T'' = \left(t''/n''\right)$, după relația:

$$k_{12} = 4\pi^2 m\left[\left(\frac{n''}{t''}\right)^2 - \left(\frac{n}{t}\right)^2\right] \tag{29}$$

❻ se completează Tabelul 2 ;

❼ pentru fiecare caz se va determina de mai multe ori timpul în care se realizează un număr de oscilații și rezultatele se vor trece în tabelul cu rezultate experimentale.

Tabelul 2

Determinarea constantei elastice a resortului de cuplaj

Nr. det	m (g)	n	t (s)	n’	t’ (s)	n’’	t’’ (s)	k_{12} (N/m)
1.								
2.								
…								