STUDIUL MISCARII OSCILATORII FORTATE

Scopul lucrării:

În acestă lucrare se studiază mişcarea oscilatorie forțată a unei coloane de lichid, aflată sub acțiunea unei forțe exterioare periodice. Se determină o serie de mărimi caracteristice mişcării, (frecvența proprie, lărgimea curbei de rezonanță, factorul de calitate) prin trasarea curbei de rezonanță. De asemenea, se face analiza influenței amortizării asupra amplitudinii şi frecvenței oscilațiilor forțate.

Principiul fizic:

Dacă asupra unui sistem fizic, capabil să oscileze, acționează o forță a cărei intensitate variază periodic în timp, atunci sistemul va executa o ***mişcare oscilatorie forțată.*** Pentru studiul caracteristicilor unei astfel de mişcări, considerăm o coloană de lichid de lungime ***L,*** aflată într-un tub de sticlă în formă de ***U,*** având secțiunea circulară de arie ***S*** (Fig. 1a). Presupunem că asupra coloanei de lichid acționează din exterior forța periodică:

$$F_p = F_{p0} \sin \Omega t \qquad (1)$$

caracterizată prin amplitudinea F_{p0} şi prin pulsația **Ω.** Sub acțiunea acestei forțe, coloana de lichid începe să oscileze de o parte şi de alta a poziției sale de echilibru. Ca urmare, ea va ocupa la un moment dat, **t**, poziția indicată în Fig. 1b. În această poziție caracterizată prin elongația ***z***, asupra coloanei de lichid va acționa forța de revenire:

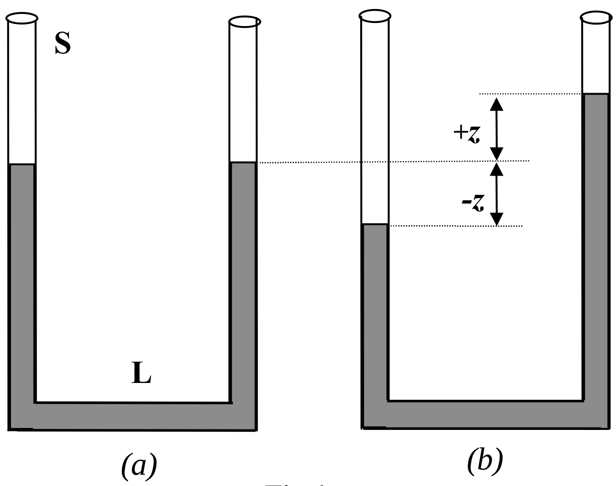

Fig.1

$$F_e = -\rho S\left(\frac{L}{2} + z\right)g + \rho S\left(\frac{L}{2} - z\right)g = -2\rho z S g = -kz \qquad (2)$$

care tinde să o readucă în poziția inițială.

Această forță egală cu greutatea coloanei de lichid de înălțime ***2z***, fiind proporțională cu elongația şi fiind opusă ca semn acesteia, joacă rolul unei forțe elastice.

În afară de forțele F_p şi F_e, asupra coloanei de lichid mai acționează, de regulă, şi o forță de frecare F_f care se opune mişcării coloanei de lichid. Mărimea acestei forțe depinde în general de natura lichidului şi a pereților vasului, precum şi de viteza de deplasare a lichidului. În cele ce urmează, vom presupune că mărimea ei este proporțională cu viteza de deplasare a coloanei de lichid, adică:

$$F_f = -r \cdot v \tag{3}$$

unde r este o constantă de proporționalitate.

În conformitate cu principiul al doilea al mecanicii newtoniene, accelerația coloanei de lichid este dată de ecuația:

$$a = \frac{\left(F_p - F_e - F_f\right)}{m} \tag{4}$$

în care $\boldsymbol{m = \rho L S}$ reprezintă masa întregii coloane.

Ținând cont de faptul că:

$$v = \frac{dz}{dt} \quad \text{şi} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{5}$$

această ecuație poate fi transcrisă sub forma:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\delta \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 \cdot z = f_{p0} \cdot \sin \Omega t \tag{6}$$

în care s-au folosit notațiile:

$$\delta = \frac{r}{2m}; \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{şi} \quad f_{p0} = \frac{F_{p0}}{m} \tag{7}$$

Ecuația (6) redă dendența elongației $\boldsymbol{z}$ de timp**.** Soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul 2 neomogene, este de forma (vezi Anexa 1):

$$Z = a_0 e^{-\delta t} \sin\left(\omega t + \varphi\right) + A \sin\left(\Omega t + \varphi\right) \tag{8}$$

Această soluție se compune aditiv din soluția generală:

$$z_1 = a_0 e^{-\delta t} \sin\left(\omega t + \varphi\right) = a(t) \sin\left(\omega t + \varphi\right) \tag{9}$$

a ecuației diferențiale omogene:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\delta \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \tag{10}$$

şi din soluția particulară:

$$z_2 = A \sin\left(\Omega t + \varphi\right) \tag{11}$$

a ecuației diferențiale neomogene.

Soluția generală a ecuației diferențiale omogene descrie mişcarea coloanei de lichid în lipsa forței externe. Această mişcare este o mişcare ***oscilatorie amortizată*** caracterizată prin amplitudinea variabilă în timp:

$$a(t) = a_0\, e^{-\delta t} \quad (12)$$

pulsația dependentă de amortizare:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (13)$$

şi faza inițială constantă.

Mărimile $\boldsymbol{a_0}$ şi ω_0 reprezintă amplitudinea, respectiv pulsația mişcării oscilatorii neamortizate pe care ar executa-o coloana de lichid dacă asupra ei nu ar acționa nici forța de frecare $\boldsymbol{F_f}$ şi nici forța periodică $\boldsymbol{F_p}$.

Mişcarea oscilatorie amortizată se "***stinge***" cu atât mai repede cu cât ***factorul de amortizare,*** **δ,** este mai mare. Într-adevăr, într-un interval de timp $\tau = 1/\delta$, numit ***constanta de timp a oscilatorului***, amplitudinea $\boldsymbol{a}(t)$ a oscilațiilor scade, în conformitate cu (12), de e (≅ 2,71) ori. Întrucât în intervalul de timp $\boldsymbol{T = 2\pi/\omega}$, care constituie ***perioada oscilațiilor amortizate***, amplitudinea $\boldsymbol{a}(t)$ scade de $e^{+\delta T}$ ori şi dacă se defineşte ***decrementul logaritmic.***

$$D = \delta T = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} \quad (14)$$

rezultă că, în intervalul τ oscilatorul va executa un număr de oscilații, care, evident va fi cu atât mai mic, cu cât $\boldsymbol{D}$ este mai mare (adică $\boldsymbol{\delta}$ şi $\boldsymbol{T}$ sunt mai mari):

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta \cdot T} = \frac{1}{D} \quad (15)$$

Pentru caracterizarea performanțelor oscilatorului se foloseşte cel mai adesea mărimea:

$$Q = \pi \cdot N = \frac{\omega}{2\delta} \quad (16)$$

care se numeşte *factor de calitate*. Cu cât $\boldsymbol{\delta}$ este mai mic, cu atât $\boldsymbol{Q}$ este mai mare şi deci oscilatorul este "mai bun".

Având în vedere relația (12) este uşor de văzut că, după un interval de timp:

$$t_p \cong 5\tau \quad (17)$$

amplitudinea oscilațiilor amortizate scade la 1% din valoarea ei maximă. De aceea, acest interval de timp se numeşte ***durata practică*** a procesului de "***stingere***" a oscilațiilor. Pentru a avea după acest interval de timp oscilații practic sesizabile, este necesar să întreținem oscilațiile.

Sub acțiunea forței periodice exterioare, oscilatorul execută o mişcare oscilatorie forțată descrisă de ecuația (11). În această ecuație, $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{\varphi}$ reprezintă amplitudinea, respectiv faza inițială a oscilațiilor forțate. Ele au următoarele expresii (vezi Anexa 2).

$$A = \frac{f_{p0}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\delta\Omega\right)^2}} \qquad (18)$$

$$\varphi = \mathrm{arc}\,tg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \qquad (19)$$

Cele două mărimi depind, prin urmare, de pulsația, **Ω,** a forței periodice exterioare.

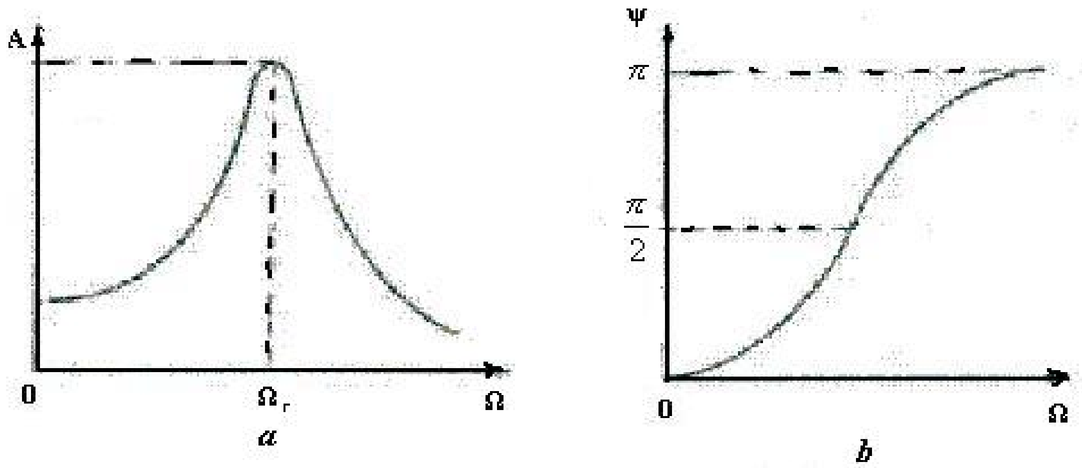

Fig. 2

Modul de variație este indicat în Fig. 2**.**

Fenomenul de creştere a amplitudinii oscilațiilor forțate spre o valoare maximă atunci când pulsația forței exterioare se apropie de pulsația oscilațiilor libere, se numeşte ***rezonanță***.

Pulsația la care are loc rezonanța se găseşte din condiția $dA/d\Omega = 0$ şi are expresia (Anexa 3).

$$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \qquad (20)$$

La această pulsație, amplitudinea oscilațiilor forțate este:

$$A_{max} = \frac{f_{p0}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{f_{p0}}{2\delta\Omega_r} \qquad (21)$$

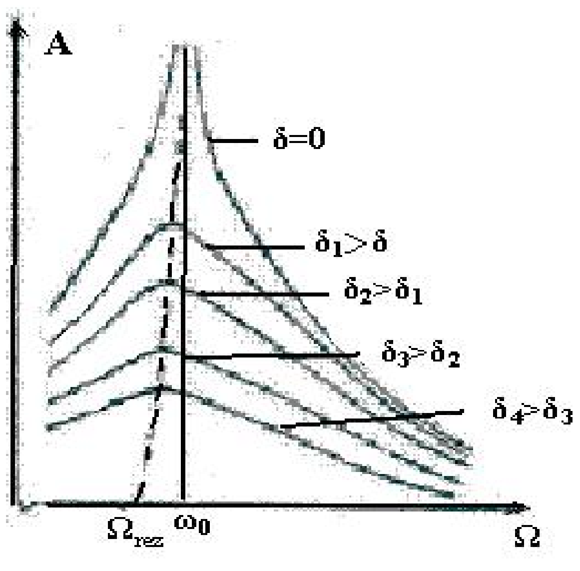

Fig. 3

Din aceste relații rezultă că, pe măsura scăderii amortizării, pulsația de rezonanță $\mathbf{\Omega_{rez}}$ se apropie tot mai mult de pulsația proprie, $\boldsymbol{\omega_0}$,a oscilatorului, iar amplitudinea maximă a oscilațiilor forțate tinde tot asimptotic spre infinit (Fig. 3). Prin urmare, pentru amortizări mici $(\delta < \omega_0)$ şi pulsaţii apropiate de pulsaţia de rezonanţă $(\Omega \cong \Omega_1 \cong \omega \cong \omega_0)$ putem scrie pentru amplitudinea normată $\alpha = A/A_{\max}$ relaţia:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_0}{\Omega}-\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad (22)$$

Dependenţa ***a*(*Ω*)** (Fig. 4) se comportă astfel, încât pentru pulsaţiile Ω_1 şi Ω_2 avem :

$$\frac{\omega_0}{\Omega_1}-\frac{\Omega_1}{\omega_0}=+\frac{1}{Q}$$

şi: $$\frac{\omega_0}{\Omega_2}-\frac{\Omega_2}{\omega_0}=-\frac{1}{Q}.$$

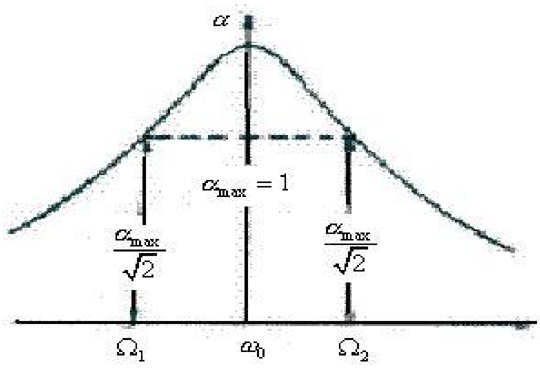

Fig. 4

Pentru $\alpha = \frac{\alpha_{\max}}{\sqrt{2}}$, intervalul de pulsaţii cuprins între $\mathbf{\Omega_1}$ şi $\mathbf{\Omega_2}$, notat prin:

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 \qquad (24)$$

se numeşte ***lărgimea curbei de rezonanţă normate.*** Din relaţiile (23) şi (24) rezultă o formulă de calcul pentru factorul de calitate:

$$Q = \frac{\omega_0}{B} \qquad (25)$$

Descrierea dispozitivului experimental

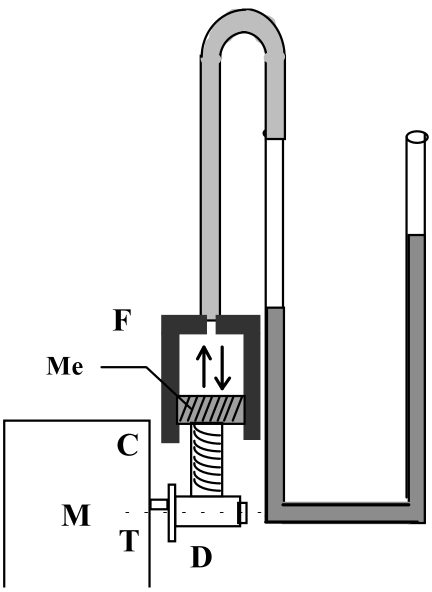

Fig.5

Aparatul folosit la studiul oscilaţiilor forţate este reprezentat schematic în Fig. 5**.** El se compune din oscilatorul propriu-zis (tubul în formă de ***U,*** umplut cu lichid) şi dispozitivul de excitare, a mişcării oscilatorii. Acest dispozitiv constă dintr-un cilindru, ***C,*** umplut cu aer şi legat la un capăt cu oscilatorul prin intermediul unui furtun de cauciuc ***F.*** La capătul celălalt al cilindrului se află o membrană elastică, Me**,** care, prin mişcarea sa de du-te-vino supune aerul din cilindru la comprimări şi destinderi succesive; ca urmare, coloana de lichid va urca şi coborî periodic. Mişcarea membranei este asigurată de un motor electric de c.c., ***M,*** prin intermediul unui disc excentric ***D*** şi a unei tije, ***T***. Un capăt al tijei se sprijină pe marginea discului ***D***, iar celălalt capăt este legat solidar cu mijlocul membranei de cauciuc.

Modul de lucru:

a) **Ridicarea curbei de rezonanță a oscilatorului**

❶ Se conectează aparatul la rețea şi se pune motorul în funcțiune prin acționarea comutatorului de curent pe poziția "pornit";

❷ Se aduce motorul la turația cea mai mică cu ajutorul butonului reostatului care limitează curentul de alimentare a motorului;

❸ La această turație se determină amplitudinea şi frecvența oscilațiilor forțate. Amplitudinea se citeşte pe scala aparatului iar frecvența se determină cronometrând timpul în care oscilatorul efectuează un anumit număr de oscilații. Acest număr se citeşte pe scara numărătorului cu care este prevăzut aparatul;

❹ Se creşte uşor turația motorului şi se determină din nou amplitudinea şi frecvența oscilațiilor forțate;

❺ Se repetă aceste operații până când s-a parcurs toată gama de frecvențe accesibile.

❻ Se completează tabelul de date experimentale:

Tabelul 1

Determinarea factorului de calitate al unui oscilator mecanic

Nr.det	n(osc.)	t(s)	Ω(rad/s)	A(cm)	α
1.					
2.					
3.					
…					

b) **Determinarea factorului de calitate**

❶ Se reprezintă grafic pe o foaie milimetrică amplitudinile normate (α) în funcție de frecvențele de oscilație corespunzătoare, obținându-se astfel curba de rezonanță normată;

❷ Din curba de rezonanță se determină frecvența proprie de oscilație $f_0 = \omega_0/2\pi$ a oscilatorului precum şi frecvențele laterale $f_1 = \Omega_1/2\pi$ şi $f_2 = \Omega_2/2\pi$, pentru care amplitudinea redusă descreşte la 0,707 din valoarea sa maximă.

❸Se calculează factorul de calitate cu ajutorul formulei:

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \tag{26}$$

c). **Analiza influenței amortizării asupra amplitudinii şi frecvenței oscilațiilor forțate**

Se poate modifica gradul de amortizare al oscilațiilor prin montarea unui robinet-clemă pe furtunul de cauciuc (*F*), care asigură legătura dintre cilindru şi oscilator. Se vor ridica curbele de rezonanță ale oscilatorului, în cazul unor amortizări diferite.

A N E X A 1

Soluția generală a ecuației (10) se poate obține astfel:

- Se alege o soluție de forma:

$$z = \exp(\lambda t) \tag{28}$$

în care λ este un parametru arbitrar.

- Se introduce această soluție în ecuația (10) şi se obține ecuația algerică caracteristică:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{29}$$

- Se rezolvă această ecuație pentru a găsi valorile lui λ. După cum discriminantul acestei ecuații $D = \delta^2 - \omega_0^2$ este mai mare, egal sau mai mic ca zero, rădăcinile ei λ_1 şi λ_2 sunt reale distincte, reale confundate sau complex-conjugate. Ne interesează acest din urmă caz, când:

$$\lambda_1 = -\delta - j \cdot \sqrt{-\Delta} = -\delta - j\omega \quad \text{şi} \quad \lambda_2 = -\delta + j\sqrt{-\Delta} = -\delta + j\omega \tag{30}$$

Acestor rădăcini le corespund soluțiile:

$$z_1 = \exp(-\delta - j\omega)t \quad \text{şi} \quad z_2 = \exp(-\delta + j\omega)t \tag{31}$$

Soluția generală a ecuației (10) se obține ca o combinația liniară a celor două soluții, adică:

$$z = a_1 z_1 + a_2 z_2 = \left[\left(a_1 \exp(-j\omega t) + a_2 \exp(j\omega t)\right)\right]\exp(-\delta t) \tag{32}$$

unde a_1 şi a_2 sunt două constante arbitrare, care se determină din condițiile fizice inițiale: la $t = 0$, $z = z_0$ şi $v = v_0$. Ținând cont de formulele lui Euler :

$$\begin{aligned} \exp(-j\omega t) &= \cos\omega t - j\sin\omega t \\ \exp(+j\omega t) &= \cos\omega t + j\sin\omega t \end{aligned} \tag{33}$$

şi folosind notațiile:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_0 \sin\varphi \\ j(a_1 - a_2) &= a_0 \cos\varphi \end{aligned} \tag{34}$$

unde a_0 şi φ sunt alte două constante arbitrare, se obţine soluţia generală sub forma:

$$z = a_0\, e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{35}$$

A N E X A 2

Constantele arbitrare ***A*** şi φ care apar în expresie soluţiei particulare (10) se determină astfel: se derivează de două ori expresia (10), iar derivatele astfel obţinute se introduc în ecuaţia (5). Se obţine astfel egalitatea:

$$\begin{aligned} &A\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\cos\varphi + 2\delta\Omega\sin\varphi\right]\sin\Omega t + \\ &A\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\sin\varphi + 2\delta\Omega\cos\varphi\right]\cos\Omega t = f_{p0}\sin\Omega t \end{aligned} \tag{39}$$

Cum membrul drept al acestei egalităţi nu conţine termen în $\cos \boldsymbol{\Omega t}$ rezultă că:

$$\begin{aligned} &\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\sin\varphi - 2\delta\Omega\cos\varphi = 0 \\ &A\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\cos\varphi + 2\delta\Omega\sin\varphi\right] = f_{p0} \end{aligned} \tag{40}$$

Folosind acest ultime două ecuaţii rezultă expresiile mărimilor *A* şi **φ.**

A N E X A 3

Pentru ca amplitudinea să devină maximă este necesar ca:

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \tag{41}$$

$$\text{şi} \qquad \frac{d^2 A}{d\Omega^2} < 0 \tag{42}$$

Întrucât:

$$A = f_{p0}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\delta\Omega\right)^2\right]^{-1/2} \tag{43}$$

rezultă că:

$$\frac{dA}{d\Omega} = -\frac{f_{p0}}{2}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\delta\Omega\right)^2\right]^{-3/2}\left[2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)(-2\Omega) + \left(2\delta\Omega\right)2\delta\right] = 0 \tag{44}$$

atunci când:

$$\Omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{45}$$

Derivând încă odată expresia lui *dA*/*d*Ω se arată uşor că şi condiţia a doua este satisfăcută.