DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE FRECARE LA ROSTOGOLIRE

Scopul lucrării

În lucrarea de față se determină valoarea coeficientului de frecare la rostogolire, utlizând un dispozitiv ce permite găsirea expresiei forței de frecare F_{fr}.

Considerații teoretice

După cum este cunoscut, în regiunea de contact dintre două corpuri care apasă unul asupra celuilalt se produce o deformare a ambelor corpuri. Dacă luăm în considerare, ca exemplu, un corp cilindric, aflat ***în repaus*** pe o suprafață solidă (Fig. 1a), se constată că deformarea suportului (dar şi a corpului) este ***simetrică***. Forțele de reacțiune normală din partea suportului, de pe porțiunea ***BA***, au (într-o primă aproximație) dreapta suport trecând prin punctul O; ele vor da, prin compunere, o rezultantă**,** notată aici $\vec{R}_{BA}$**.** Acelaşi lucru este valabil şi în cazul forțelor de pe porțiunea ***AC***, care vor da rezultanta $\vec{R}_{AC}$.

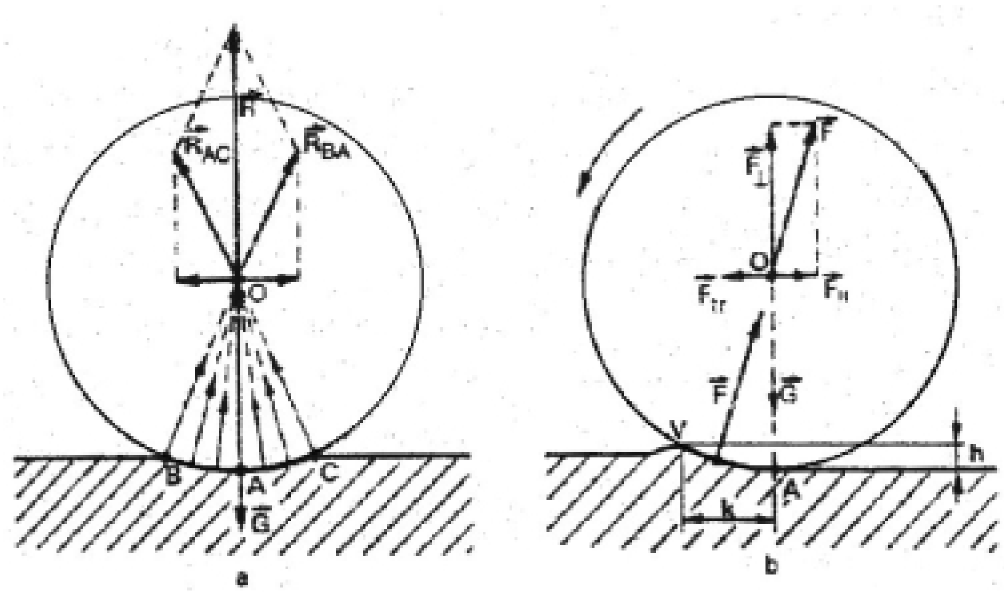

Fig. 1

Rezultanta generală, $\vec{R}$, a forțelor de reacțiune din partea suportului asupra corpului cilindric este orientată pe verticală în sus (deoarece, din cauza simetriei, componentele orizontale ale lui $\vec{R}_{BA}$ şi $\vec{R}_{AC}$ sunt egale şi de sens opus). Rezultanta $\vec{R}$ egalează în efect greutatea cilindrului şi, ca urmare, acesta rămâne în echilibru.

Dacă cilindrul este pus într-o ***mişcare de rostogolire*** în sensul indicat în Fig. 1b, deformația devine ***asimetrică***. Rezultanta, notată în acest caz cu $\vec{F}$, este acum o-blică față de verticală (făcând un unghi mai mic de 90° cu orizontala); apare, acum, o forță necompensată pe orizontală, $\vec{F}_{II}$, care determină o mişcare încetinită.

Menționăm că, în cazul ***exclusiv*** al unei mişcări de rostogolire nu există şi alunecare: la nivelul suprafeței de contact, punctele de pe suprafața cilindrică sunt în repaus (atât timp cât durează contactul) față de suprafața-suport. Rostogolirea fără alunecare este o mişcare compusă dintr-o rotație în jurul axei de simetrie a cilindrului şi o translație spre stânga (în cazul Fig. 1b) a întregului corp, cu o viteză egală cu viteza centrului de masă al acestuia. Dacă dorim ca mişcarea să ramână uniformă, forța necompensată, $\vec{F}_{II}$, va trebui compensată în efect de o altă forță, egală şi de sens contrar (jucând, prin urmare, rol de forță de tracțiune).

Mărimea forței de frecare de rostogolire poate fi evaluată experimental măsurând, deci, forța de tracțiune menționată.

De fapt, fiind vorba de o mişcare de rotație, este necesar să comparăm ***momentul activ (determinat de forța de tracțiune)*** în raport cu punctul în jurul căruia are loc rotația - punctul ***V*** - cu ***momentul rezistent (determinat de greutatea G)***, care se opune rostogolirii în jurul lui ***V***.

Momentul activ va fi, deci:

$$M_a = F_{tr}(r-h) \cong F_{tr} r \quad (h << r) \tag{1}$$

unde ***h*** este înălțimea denivelării din fața cilindrului.

Momentul rezistent este :

$$M_r = kG \tag{2}$$

unde ***k*** este brațul forței $\vec{G}$ (perpendiculara dusă din ***V*** pe dreapta suport a greutății). Mărimea ***k*** se numeşte ***coeficient de frecare la rostogolire***; ea se poate, deci, determina din ecuația:

$$r \cdot F_t = k \cdot G \quad \text{sau} \quad r F_{fr} = k R \tag{3}$$

Se poate considera că mişcarea de rostogolire pe care o execută cilindrul se face în orice moment jurul unei axe ce are direcția generatoarei cilindrului ce trece prin ***A***. Rolul acestei axe este preluat de mereu alte generatoare ale cilindrului, care reprezintă puncte de pe linia de contact dintre cilindru şi plan. Această dreaptă de contact poartă numele de ***axă instantanee de rotație.***

Dacă ***dm*** este masa unui element de volum ce face parte din corpul cilindric (Fig. 2), atunci asupra acestuia acționează forța de atracție a Pământului, $dm\,\vec{g}$. Sub acțiunea acestei forțe, elementul de masă ***dm*** obține o accelerație liniară ***a = γ·r***.

Aplicând principiul al doilea al dinamicii, putem scrie:

$$\partial F = dm \cdot g \cdot \sin\varphi = dm \cdot \gamma \cdot r \tag{4}$$

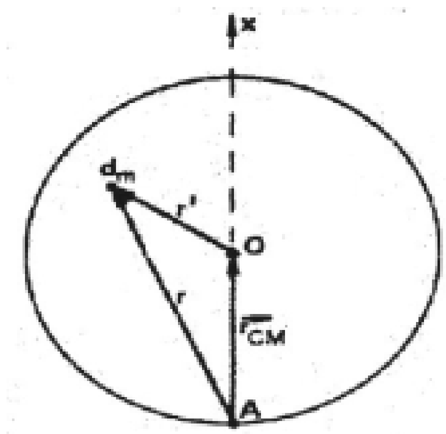

Fig. 2

unde **∂F = *dm g sinφ*** este componenta forței $dm\,\vec{g}$ după o direcție tangentă la traiectoria circulară, descrisă de elementul de masă ***dm*** în jurul axei instantanee de rotație. Ținând seama de definiția produsului vectorial putem scrie :

$$\left|\frac{\vec{r}}{r} \times dm\,\vec{g}\right| = dm \cdot \gamma \cdot r \tag{5}$$

sau:

$$\vec{r} \times dm\,\vec{g} = \vec{\gamma}\,r^2 dm \tag{6}$$

Integrând pe întregul volum al corpului cilindric găsim:

$$\int \vec{r} \times dm\,\vec{g} = \vec{\gamma}\int_V r^2 dm = \vec{\gamma}\,I \tag{7}$$

unde: $I = \int_V r^2 dm$ este momentul de inerție al cilindrului în raport cu axa de rotație instantanee.

Ținând seama de definiția vectorului de poziție al centrului de masă (***CM***):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\,dm \tag{8}$$

rezultă prin înlocuire :

$$\left|\vec{r}_{CM} \times m\vec{g}\right| = \gamma\,I \tag{9}$$

unde $\vec{r}_{CM}$ este vectorul de poziție al centrului de masă în raport cu axa instantanee de rotație, ***m*** masa totală a cilindrului, iar **γ** este accelerația unghiulară a mişcării de rotație în jurul axei instantanee.

După cum se ştie, centrul de masă al unui cilindru omogen este situat pe axa de simetrie a acestuia, astfel că $\mathbf{r_{CM}}$ este egală cu raza cilindrului. Produsul vectorial $\vec{r}_{CM}$ **x** $m\vec{g}$ este momentul forței de greutatea a cilindrului (considerată ca având punctul de aplicație în ***CM***) în raport cu axa instantanee de rotație. Luând în considerare Fig. 2 putem scrie :

$$I = \int r^2 dm = \int r_{CM}^2 dm + \int (r')^2 dm + 2\int r_{CM} r' \cos\varphi \ \ dm \qquad (10)$$

Dacă se alege un sistem de coordonate astfel orientat, încât direcția axei sale ***Ox*** să fie paralelă la direcția vectorului $\vec{r}_{CM}$, atunci

$$r' \cos\varphi = x .$$

Ca urmare putem scrie :

$$\int r' \cos\varphi \ dm = \int x dm = x_{CM} m$$

unde, conform definiției, $\boldsymbol{x_{CM}}$ este coordonanta ***x*** a centrului de masă. Ținând seama că ***O*** este situat in ***CM*** rezultă că $\boldsymbol{x_{CM} = 0}$**,** astfel încât din (10) găsim:

$$I = mr_{CM}^2 + I_{CM} \qquad (11)$$

unde $\mathbf{I_{CM}}$ este ***momentul de inerție*** al corpului cilindric în raport cu axa ce trece prin ***CM***. Ecuația (11) exprimă aşa numita **teoremă a lui Steiner** .
Înlocuind (11) in (9) obținem relația :

$$r_{CM} mg \sin\alpha = \gamma(mr_{CM}^2 + I_{CM}) = \gamma mr_{CM}^2 (1 + \frac{I}{mr_{CM}^2}) \qquad (12)$$

sau:

$$\frac{g \sin\alpha}{1 + I / mr_{CM}^2} = \gamma r_{CM} = a_1 = const. \qquad (13)$$

unde $\boldsymbol{a_1}$ este accelerația liniară obținută de punctul **O,** ca urmare a rotirii corpului în jurul axei instantanee de rotație.

Cunoscând expresia accelerației liniare, putem găsi acum viteza liniară a *CM* pe care acesta o obține după rostogolire pe şinele înclinate. Avem :

$$v_{CM} = \int_0^{t_1} a \ dt = \frac{g \sin\alpha}{1 + I / mr_{CM}^2} t_1 \qquad (14)$$

unde $\boldsymbol{t_1}$ este durata rostogolirii pe şinele înclinate. Alegând $\boldsymbol{t_1}$ egal cu durata în care cilindrul ajunge în punctul B,, la baza planului înclinat, rezultă că $\mathbf{v_{CM}}$ este viteza iniațială începând cu care cilindrul, datorita inerției, se rotogoleşte mai departe pe şinele orizontale.

Trebuie precizat ca până în prezent nu am ținut seama de efectul momentului rezistent al forței de frecare la rostogolire, deoarece, aşa cum am amintit anterior, am considerat forța exterioară ce acționează asupra discului (componenta greutății, paralelă la direcţia şinelor înclinate) mult mai mare decât forţa de frecare la rostogolire.

Din momentul în care discul începe rostogolirea pe şinele orizontale mişcarea de rotaţie devine încetinită: momentul forţei de greutate a corpului nu mai produce în acest caz un efect de rotaţie (el este nul). Cauza încetinirii mişcării o constituie momentul forţei de frecare, dat de relaţia (2).

Dacă se notează cu $\boldsymbol{a_2}$ acceleraţia ***CM***, determinată de acţiunea forţei de frecare la rostogolire, atunci putem scrie $\boldsymbol{F}_{\text{fr}} = \boldsymbol{m}\ \boldsymbol{a}_2$ şi, fiind vorba de o mişcare de rotaţie în jurul axei instantanee, putem scrie:

$$r_{CM} F^{fr} = I\gamma = I\frac{a_2}{r_{CM}}$$

sau:

$$a_2 = F^{fr}\frac{r_{CM}^2}{I} \tag{15}$$

Considerând că $\boldsymbol{F}_{\text{fr}}$ este constantă, rezultă că acceleraţia pe care o obţine ***CM*** datorită frecării este şi ea constantă, astfel încât mişcarea ***CM*** este uniform încetinită. Ca urmare putem scrie:

$$l_2 = v_{CM} t_2 - \frac{a_2 t_2^2}{2} \tag{16}$$

unde $\boldsymbol{l_2}$ este distanţa parcursă de disc pe şinele plane până la oprire, iar $\boldsymbol{t_2}$ este durata de parcurgere a distanţei $\boldsymbol{l}_2$.

Ţinând seama de relaţia (14) găsim:

$$a_2 = 2\left(\frac{hg}{1 + I/mr_{CM}^2}\cdot\frac{t_1}{t_2 l_1} - \frac{l_2}{t_2^2}\right) \tag{17}$$

În expresia (17) am înlocuit $\boldsymbol{\sin\alpha = h/l_1}$, $\boldsymbol{h}$ fiind înălţimea planului înclinat, iar $\boldsymbol{l}_1$ - lungimea acestuia. Folosind ecuaţiile (17) şi (2) putem găsi, în final expresia coeficientului de frecare la rostogolire:

$$F_{fr} = \frac{2I}{r_{CM}^2}\left(\frac{hg}{1 + I/mr_{CM}^2}\cdot\frac{t_1}{t_2 l_1} - \frac{l_2}{g t_2^2}\right) = k\cdot\frac{mg}{r_{CM}} \tag{18}$$

de unde ***coeficientul de frecare la rostogolire*** va fi :

$$k = \frac{2I}{m r_{CM}}\left(\frac{1}{1 + I/mr_{CM}^2}\cdot\frac{t_1 h}{t_2 l_1} - \frac{l_2}{g t_2^2}\right) \tag{19}$$

Calculul momentului de inerţie

Corpul ce execută mişcarea de rostogolire este alcătuit, în cazul nostru, dintr-un ax cilindric de rază $\boldsymbol{r}_{\text{CM}}$ şi un disc de rază ***R*** fixat solidar de acesta. Vom găsi expresia momentului de inerţie total (al ansamblului cilindru-disc) în raport cu o axă ce trece prin centrul de masă al sistemului scriind, mai întâi pentru ***cilindru***:

$$I_{cil} = \int_V r^2 dm = \rho \int r^2 \cdot r d\varphi \cdot dr \cdot dl = \rho d_1 \int_0^{r_{CM}} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho \frac{r_{CM}^4}{4} d_1 = \frac{m_{cil} r_{CM}^2}{2} \qquad (20),$$

unde $\boldsymbol{d}_1$ este lungimea cilindrului, ρ - densitatea, iar $\boldsymbol{m}_{cil}$- masa acestuia.

Momentul de inerție al ***discului*** în raport cu CM se găseşte efectuând un calcul analog. El este dat de expresia :

$$I_{disc} = \int_r^R r^2 dm \cong \int_0^R r^2 dm = \frac{m_{disc} R^2}{2} \qquad (21)$$

Momentul de inerție al ansamblului este:

$$I = \frac{1}{2}(m_{cil} r_{CM}^2 + m_{disc} R^2) \qquad (22)$$

Masele $\boldsymbol{m}_{cil}$ şi $\boldsymbol{m}_{disc}$ se obțin prin cântărire, iar $\boldsymbol{r}_{CM}$ si $\boldsymbol{R}$ se măsoară cu ajutorul micrometrului şi şublerului. Din construcție s-au ales dimensiunile, astfel încât $R >> r_{CM}$ şi $\boldsymbol{m}_{cil} << \boldsymbol{m}_{disc}$, astfel încât putem folosi, pentru momentul de inerție total, dat de (22), fără a face erori prea mari, expresia :

$$I \cong \frac{1}{2} m R^2 \qquad (23)$$

Cu acest rezultat găsim :

$$k = \frac{R^2}{r_{CM}} \cdot \left(\frac{1}{1 + R^2 / 2r_{CM}^2} \cdot \frac{t_1 h}{t_2 l_1} - \frac{l_2}{g t_2^2} \right) \qquad (24)$$

În ultima expresie toate mărimile pot fi măsurate, ceea ce permite calcularea coeficientului de frecare la rostogolire **k**.

Descrierea dispozitivului experimental.

Dispozitivul experimental utilizat este arătat schematic în Fig.3. El constă

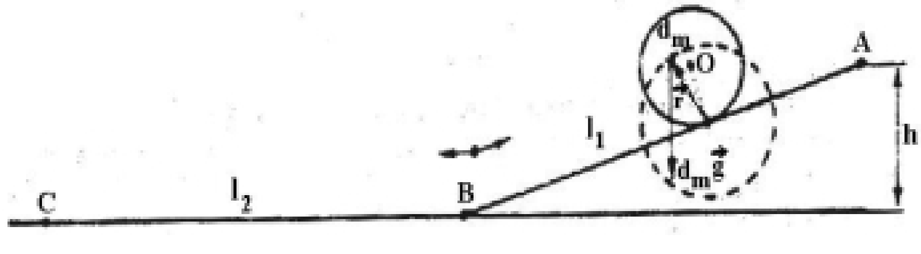

Fig. 3

dintr-un plan înclinat, AB, format din două şine paralele, care serveşte la accelerarea mişcării cilindrului amintit anterior (porțiune pe care efectul frecării de rostogolire este neglijabil, în raport cu acela al celorlalte forțe îndreptate de-a lungul planului înclinat); urmează o a doua porţiune, BC - orizontală - pe care cilindrul se deplasează ***exclusiv sub efectul forţei de frecare de rostogolire.***

Unghiul planului înclinat trebuie astfel ales încât mişcarea cilindrului să fie ***numai*** de rostogolire. Cu ajutorul unui cronometru se pot măsura duratele $\boldsymbol{t}_1$ şi $\boldsymbol{t}_2$ în care cilindrul, în rostogolire, parcurge pe şinele înclinate şi pe orizontală anumite distanţe bine precizate ($\boldsymbol{l}_1$ şi $\boldsymbol{l}_2$). Corpul cilindric este solidar, din motive justificate anterior, cu un disc de rază mult mai mare.

Modul de lucru

❶ se măsoară dimensiunile corpului;

❷ se aleg diverse valori ale unghiului planului înclinat, astfel încât mişcarea corpului să fie ***exclusiv*** de rostogolire (să nu existe alunecare);

❸ se lasă liber corpul pe planul înclinat şi se măsoară mărimile $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, precum şi timpii corespunzători, $\boldsymbol{t}_1$ şi $\boldsymbol{t}_2$;

❹ se completează tabelul de date experimentale:

Tabelul 1

Determinarea coeficientului de rostogolire

Nr.det.	$\boldsymbol{R}$ *(cm)*	r_{CM} *(cm)*	$\boldsymbol{h}$ **(cm)**	$\boldsymbol{l}_1$ *(cm)*	$\boldsymbol{l}_2$ *(cm)*	$\boldsymbol{t}_1$ *(s)*	$\boldsymbol{t}_2$ *(s)*	$\boldsymbol{k}$ *(cm)*	$\boldsymbol{\Delta k}$ *(cm)*
1.									
2.									
...									

❺ se repetă experimentul de 8 - 10 ori, în aceleaşi condiţii;

❻ se repetă determinările, pentru alte valori ale unghiului planului înclinat;

❼ se efectuează calculul erorilor, folosind metoda diferenţialei logaritmice.