DETERMINAREA MOMENTULUI DE INERTIE AL UNUI CORP FATA DE O AXA PRIN METODA PENDULULUI DE TORSIUNE

Scopul lucrarii.

În aceasta lucrare se studiaza miscarea oscilatorie a unui pendul de torsiune si se determina momentul de inertie al unui corp rigid fata de o axa de rotatie ce trece prin centrul sau de masa.

Consideratii teoretice.

Momentul de inertie al unui sistem discret de ***N*** puncte materiale, în raport cu o axa se defineste prin relatia:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \tag{1}$$

unde $\boldsymbol{m_i}$ sunt masele punctelor materiale care alcatuiesc corpul, iar $\boldsymbol{r_i}$ distantele de la acestea pâna la axa. Daca distributia masica este continua, relatia (1) devine:

$$I = \int_V r^2 dm \tag{2}$$

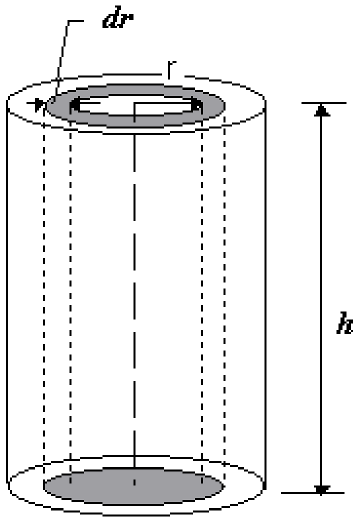

Fig. 1

Folosind relatia (2) vom calcula, pentru exemplificare, momentul de inertie al unui corp cilindric, omogen, fata de axa sa de simetrie. Masa unui volum elementar ***dV,*** având forma unei paturi cilindrice ***de*** raza ***r*** si de grosime ***dr*** (Fig. 1) este:

$$dm = \rho dV = \rho(2\pi r dr)h \tag{3}$$

Folosind relatia (2) obtinem:

$$I = \int_0^R \rho \cdot 2\pi r \cdot h \cdot r^2 dr = \pi\rho h \frac{R^4}{2} \tag{4}$$

Deoarece:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

vom obtine:

$$I = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \pi h \frac{R^2}{2} = \frac{mD^2}{2} = \frac{mD^2}{8} \tag{5}$$

unde ***D =2R*** este diametrul cilindrului.

Descrierea dispozitivului experimental.

În Fig. 2 este reprezentata schema dispozitivului ce va fi utilizat în lucrarea de fata. Un corp de forma paralelipipedica, ***C***, este suspendat în ***O'*** printr-un fir metalic ***OO'***, care trece prin centrul de masa. Pe corpul ***C*** sunt plasate simetric fata de axa ***OO'*** niste cuisoare (**P**) care permit asezarea unor mici corpuri cilindrice auxiliare C_1, C_2. Daca corpul este rotit cu un unghi oarecare fata de pozitia de echilibru, firul va suferi o deformatie de torsiune, astfel ca, el va exercita asupra corpului un cuplu de forte, care va tinde sa readuca corpul la pozitia initiala. Ajungând în aceasta pozitie cu o viteza diferita de zero, corpul ***C*** va depasi aceasta pozitie, datorita inertiei si va torsiona, în sens invers, firul elastic. Momentul de torsiune aparut în fir va determina schimbarea sensului de miscare al corpului **C**, care trece din nou prin pozitia de echilibru cu viteza nenula, miscarea repetându-se periodic.

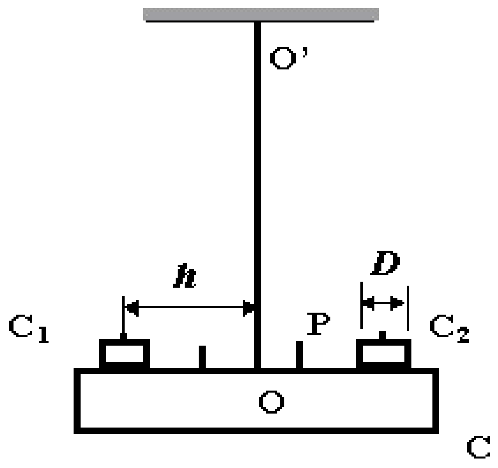

Fig. 2

Consideratii teoretice.

Momentul ***M*** al cuplului de torsiune este proportional cu unghiul de torsiune, **θ**:

$$M = -C\theta \qquad (6)$$

unde ***C*** este constanta de torsiune a firului. Constanta de torsiune a firului depinde atât de proprietatile elastice ale firului, cât si de dimensiunile acestuia. Expresia sa este:

$$C = \frac{\pi R^4 G}{2l} \qquad (7)$$

unde ***r*** este raza firului, ***l*** - lungimea lui, iar ***G*** - modul de forfecare. Momentul ***M,*** dat de relatia (6), va produce o acceleratie unghiulara a corpului rigid; legatura dintre momentul fortei si acceleratia unghiulara este data de ecuatia diferentiala a miscarii de rotatie:

$$M = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (8)$$

Înlocuind în (8) expresia momentului fortei rezulta ecuatia diferentiala:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I}\cdot\theta = 0 \qquad (9)$$

care are forma deja cunoscuta - aceea a oscilatorului armonic. Solutia ei este de forma:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad (10)$$

unde:

$$\omega_0^2 = \frac{C}{I} \qquad (11)$$

Ca urmare, perioada miscarii oscilatorii este:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \qquad (12)$$

Pentru a determina momentul de inertie al corpului considerat, fata de axa de rotatie ***OO'***, este necesar sa se masoare perioada ***T*** si sa se cunoasca constanta de torsiunea firului. Aceasta implica, însa, cunoasterea modulului de forfecare, ***G,*** al materialului din care e construit firul. Pentru a elimina aceasta necunoscuta, vom modifica momentul de inertie al sistemului fata de ***OO'*** plasând pe doua cuisoare simetrice fata de axa (la distanta ***h***), doi cilindri identici de masa ***m*** si diametru ***D***.

Momentul de inertie al sistemului devine:

$$I' = I + 2\,(I_C + mh^2) \qquad (13)$$

unde $\boldsymbol{I_C}$ este momentul de inertie al unui cilindru fata de axa de rotatie si are valoarea data de (5). În relatia (13) s-a avut în vedere faptul ca ***momentul de inertie fata de o axa oarecare este egal cu momentul de inertie al corpului fata de o axa paralela cu prima, ce trece prin centrul de masa, la care se adauga produsul dintre masa corpului si patratul distantei dintre axe*** (***teorema lui Steiner***).

Perioada de oscilatie a sistemului devine:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I + 2\left(I_C + mh^2\right)}{C}} \qquad (14)$$

Din relatiile (14) si (12) se elimina ***C*** si se obtine urmatoarea expresie pentru momentul de inertie al corpului ***I*** .

$$I = \frac{m\left(D^2 + 8h^2\right)}{4}\cdot\frac{T^2}{T'^2 - T^2} \qquad (15)$$

Modul de lucru.

1. Se masoara masa cilindrilor aditionali (***m***)

2. Se masoara diametrul lor (***D***)

3. Se masoara distanta ***h***, dintre axa si cilindrii auxiliari

4. Se pune în oscilatie pendulul de torsiune, fara corpurile aditionale si se masoara timpul în care se executa un numar de oscilatii complete (***T* = *t/n***)

5. Se aseaza cilindrii auxiliari pe cuisoare si se determina noua perioada de oscilatie (***T'***)

6. Se completeaza tabelul de date experimentale:

Tabelul 1

Determinarea momentului de inertie prin metoda pendulului de torsiune

Nr. **det.**	**m** (g)	**D** (mm)	**h** (mm)	**T** (s)	**T'** (s)	**I** (kg.m^2)
1.						
2.						
…						

7. Se efectuează calculul erorilor.

8. Se compara valoarea lui ***I***, determinat prin metoda experimentala descrisa, cu valoarea care rezulta din calcul:

$$I = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

unde ***M*** = 423 g, iar ***a*** si ***b*** sunt dimensiunile fetei paralelipipedului, perpendiculara pe axa de rotatie.

- **Nota**

Deduceti prin calcul, plecând de la relatia (2), relatia de mai sus.

Sa se planifice experimentul în asa fel încât eroarea relativa ce afecteaza rezultatul sa nu depaseasca 3%.