

STUDIUL PROPRIETĂȚILOR DE DISPERSIE ALE UNOR MEDII ELASTICE

Scopul lucrării

Vom studia aici propagarea undelor transversale și a celor longitudinale într-o coardă, respectiv un resort, urmărindu-se: (a) obținerea de unde staționare în mediile sus-menționate; (b) trasarea curbei de dispersie a undelor în mediile elastice studiate; (c) determinarea vitezei de propagare a undelor din curbele de dispersie și compararea lor cu valorile deduse din formulele de calcul specifice fiecărui tip de undă.

Considerații teoretice

Un mediu se numește *dispersiv* dacă viteza de propagare a undelor armonice în acesta depinde de frecvență. În general, proprietatea de dispersie se exprimă printr-o funcție:

$$\omega = f(k), \quad (1)$$

unde $\omega (=2\pi \nu)$ este *pulsația* undei, iar $k (= 2\pi/\lambda)$ este denumit *număr de undă* (aici ν și λ sunt frecvența și, respectiv, lungimea de undă).

Lungimea de undă este:

$$\lambda = v_f \cdot T = v_f \cdot \frac{1}{\nu}, \quad (2)$$

unde v_f este viteza de fază a undei (transversale sau longitudinale, în general). Înlocuind pe $\nu = \omega/2\pi$ în relația anterioară, putem găsi relația de legătură între ω și λ , de forma:

$$\omega = v_f \frac{2\pi}{\lambda} = v_f k, \quad (3)$$

care este forma explicită a relației (1).

În cazul unui mediu nedispersiv, caracteristica de dispersie, $\omega = f(k)$ exprimată de ecuația (3.2), este *liniară* și reciproc. Panta dependenței $\omega = f(k)$ reprezintă *viteza de fază* a undelor.

Trasarea caracteristicilor de dispersie presupune alegerea parametrilor experimentali, în așa fel încât o undă produsă de o sursă de oscilații cuplată la una din extremitățile mediului de studiat, să se reflecte la celălalt capăt al acestuia și – în urma interferenței – să se obțină experimental *unde staționare*. Acest lucru se obține, în cazul mediilor fixate la ambele capete, atunci când lungimea mediului este un multiplu întreg de semi-lungimi de undă:

$$l = n \lambda / 2, \text{ cu } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Condiția (4) poate fi satisfăcută prin reglarea lungimii de undă, fie prin *modificarea frecvenței*, fie a *vitezei de fază* a undelor.

Pentru trasarea caracteristicii de dispersie, ținând cont că $\omega = 2\pi \nu$, iar $k = 2\pi/\lambda$, este suficient să trasăm graficele dependențelor $\nu = f(1/\lambda)$.

A. Viteza de fază a undelor transversale

Viteza de fază a undelor transversale, v_t , este dată de relația:

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (5)$$

unde T este tensiunea din mediul elastic în care are loc propagarea, iar μ - densitatea liniară de masă a acestuia. În cazul unei corzi elastice, $\mu = m/l$, unde m este masa corzii, iar l - lungimea acesteia. În aceste condiții, ecuația devine:

$$v_t = \sqrt{\frac{Tl}{m}} \quad (6)$$

Avem, prin urmare, două posibilități de determinare a vitezei undelor transversale: (a) din panta curbei de dispersie; (b) folosind relația (6).

B. Viteza de fază a undelor longitudinale

În acest caz, viteza propagare este dată de relația:

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7)$$

unde E este modulul de elasticitate al mediului elastic (în cazul nostru un resort), iar ρ este densitatea mediului elastic.

Din legea lui Hooke putem scrie:

$$E = \frac{Fl}{S\Delta l}, \quad (8)$$

unde F este tensiunea din orice punct din mediul de propagare, l - lungimea și S - secțiunea acestuia.

Asimilând resortul unui mediu elastic continuu, de lungime l și masă m , putem scrie pentru densitate expresia:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sl} \quad (9)$$

Inlocuind pe E și ρ date de aceste ultime relații în ecuația (7), rezultă:

$$v_1 = l \sqrt{\frac{F}{m\Delta l}} = l \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (10)$$

prin urmare, viteza undelor longitudinale variază liniar cu lungimea resortului.

Pentru o valoare dată a lungimii, urmează să verificăm experimental, ca și în cazul undelor transversale, dacă resortul este un mediu nedispersiv, deci dacă dependența $\omega(k)$ este o dreaptă.

Avem, și în acest caz, două posibilități de determinare a vitezei undelor longitudinale: (a) din panta curbei de dispersie; (b) folosind relația (6). după ce găsim valoarea constantei elastice, k , a acestuia.

Dispozitivul experimental

Pentru producerea undelor stationare transversale vom folosi dispozitivul experimental prezentat in Fig. 1. Coarda se intinde intre doua stative, folosind mufe adecvate. Vibratorul mecanic se alimenteaza de la un generator de tensiune alternativa de frecvență audio reglabilă în domeniul 0 – 10 kHz. Măsurarea frecvenței acestuia se face folosind un multimetru digital, selectându-se scala de 2 kHz.

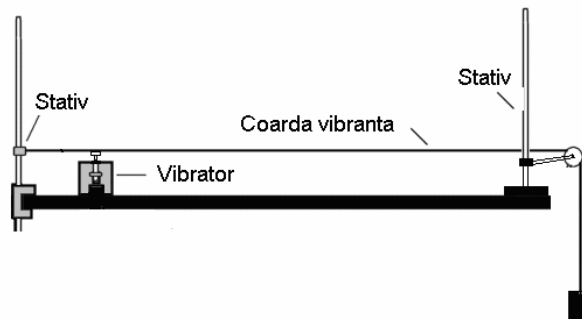


Fig. 1

Modul de lucru

A. Pentru determinarea proprietăților de dispersie ale unei coarde elastice în care se produc unde transversale se procedează în felul următor:

1. Se fixează vibratorul mecanic în poziție orizontală (Fig. 1).
2. Se alege o coardă a cărei lungime și masă au fost măsurate în prealabil, care se fixează cu un capăt de stativ, iar celălalt capăt se trece peste scripete și se încarcă cu suportul cu mase marcate.
3. Se ajustează cu grijă poziția vibratorului, pentru ca, în repaus, tija acestuia să împingă ușor în coardă, în vederea asigurării cuplajului mecanic vibrator-coardă.
4. Se cuplează multimetrul digital (setat pentru măsurarea frecvențelor) la generatorul de audiofrecvență.
5. Se alimentează, de la aceleași borne, vibratorul mecanic.

6. Se modifică frecvența vibratorului astfel încât să se obțină unde staționare cu 1, 2, 3, ... ventre. Este indicat să se aleagă o amplitudine suficient de mare a tensiunii furnizate de generatorul de audiofrecvență, pentru a se obține noduri și ventre vizibile și clar delimitate.

7. Pentru fiecare undă staționară obținută se măsoară lungimea de undă (distanța dintre două noduri consecutive este $\lambda/2$) și frecvența de vibrație a corzii.

8. Se modifică lungimea corzii și se repetă procedeul experimental.

Rezultatele experimentale se trec într-un tabel de forma:

nr. det.	l (cm)	nr. de ventre	ν (Hz)	λ (m)	$1/\lambda$ (m^{-1})	v (m/s)
1.						
2.						
...						

9. Cu ajutorul acestor date se trasează *pe același grafic* curbele de dispersie $v = f(1/\lambda)$, pentru diferitele lungimi ale resortului și se determină viteza undelor transversale din panta graficelor.

Se vor trage concluzii privind caracterul dispersiv – nedispersiv al mediului.

10. Se determină viteza undelor transversale folosind relația (6). Se compară valoarea obținută cu cea de la punctul (9). Cât este diferența relativă dintre cele două valori? Cum se explică mica diferență dintre acestea?

B. Pentru determinarea proprietăților de dispersie ale unei spirale elastice în cazul undelor transversale se procedează în felul următor:

1. Se fixează vibratorul în poziție orizontală (Fig. 2).

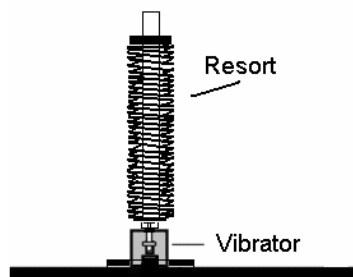


Fig. 2

2. Se folosește resortul din sârmă de oțel cu diametrul mare, a cărui capăt superior se fixează de trepidul vibratorului. Se cuplează cu grijă capătul inferior al resortului la tija vibratorului, evitând întinderea exagerată.

3. Pentru o anumită valoare a lungimii resortului (adică pentru o anumită tensiune în resort) se modifică frecvența oscilațiilor mecanice, încât să se obțină unde staționare longitudinale cu 1, 2, 3, ... ventre.

4. Pentru fiecare undă staționară obținută se măsoară lungimea de undă.

5. Se modifică tensiunea din resort (modificând lungimea acestuia) și

6. Se repetă operațiile de mai sus.

Valorile obținute se trec într-un tabel de forma:

nr. det.	l (cm)	nr. de ventre	ν (Hz)	λ (m)	$1/\lambda$ (m^{-1})	v (m/s)
1.						
2.						
...						

7. Cu ajutorul acestor date se trasează pe același grafic curbele de dispersie $\nu = f(1/\lambda)$, pentru diferite lungimi ale resortului.

8. Se compară rezultatele cu cele rezultate prin aplicarea relației (10).

Pentru resortul utilizat, masa resortului se obtine prin cântărire, iar k se măsoară

printr-o metodă statică (se trasează curba alungire-forță, k rezultând din panta acestei curbe).

9. Se interpretează rezultatele, ca și la punctul (10) din secțiunea anterioară.

Sugestie

Folosind iluminarea stroboscopică, urmăriți modul cum vibrează coarda, în cazul undelor staționare longitudinale și transversale. Ce concluzie puteți trage privind variația fazei undei de-a lungul corzii, în condiții de undă staționară?