DETERMINAREA MODULULUI DE ELASTICITATE LA SOLIDE FOLOSIND O METODA DINAMICA

Scopul lucrării

În această lucrare se va determina ***modulul de elasticitate logitudinală*** (modulul Young) al unei bare, folosind o metodă dinamică, pe baza relației dintre această mărime şi viteza de propagare a unei unde longitudinale într-un mediu solid.

Considerații teoretice.

Considerăm o bară cilindrică de diametrul ***d*** şi lungimea ***l,*** supusă unei forțe ***F,*** ce acționează în lungul axei acesteia. Sub acțiunea forței, bara se va deforma; Hookes a stabilit că, pentru valori mici ale forței, alungirea, Δl , este proporțională cu lungimea inițială a barei şi cu efortul unitar (forța raportată la mărimea suprafeței secțiunii transversale a barei).

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{F\,l}{S} \qquad (1)$$

Mărimea ***E*** din relația precedentă poartă numele de ***modulul lui Young*** sau ***modulul de elasticitate longitudinală;*** valoarea lui depinde de natura materialului supus deformării.

O deformare mică produsă într-un capăt al barei se poate propaga în lungul acesteia, iar viteza de propagare a perturbației depinde de modulul de elasticitate. Pentru a găsi această depedență vom considera o bară elastică supusă unei forțe ce acționează pe direcție longitudinală. Aceasta va cauza deplasarea de la poziția de echilibru a elementelor de masă din componența barei (Fig. 1). Ca urmare a acestor deplasări, apar forțe elastice proporționale cu depărtarea de la poziția de echilibru. Deoarece deplasările sunt diferite în diferitele secțiuni transversale ale barei, şi forțele elastice elementare care acționează asupra acestor secțiuni transversale vor fi

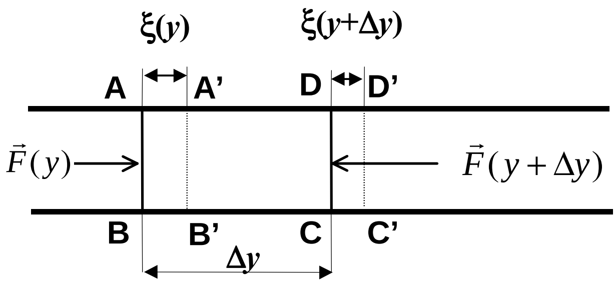

Fig. 1

diferite.

Să considerăm un element de volum din bara elastică, care are aceeaşi secțiune ca şi bara dar lungime **Δ*y***, ocupând inițial poziția ***ABCD.*** Pe cele două secțiuni transversale ale volumului considerat vor acționa două forțe diferite, pe care le vom nota cu ***F***(***y***) şi respectiv ***F(y + Δ y)***. Ca urmare a acțiunii acestor forțe, elementul de bară se va deforma, ocupând o nouă poziție, notată ***A'B'C'D'***. Scriind:

$$F(y+\Delta y)=F(y)+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\ldots, \tag{2}$$

şi oprindu-ne la primii doi termeni din dezvoltare, forța rezultantă care acționează asupra elementului de volum considerat va fi:

$$F=F(y)-F(y+\Delta y)\cong-\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y \tag{3}$$

Principiul al doilea al dinamicii se va scrie în acest caz sub forma:

$$ma=-\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y \tag{4}$$

În urma deformării, elementul de volum a suferit o alungire, iar forța elastică va fi egală şi de semn contrar cu forța dată de legea lui Hooke (1):

$$F=ES\frac{\xi(y+\Delta y)-\xi(y)}{\Delta y}=ES\frac{\partial\xi}{\partial y}\bigg|_{\Delta y\to 0} \tag{5}$$

Prin ξ s-a notat aici deplasarea secțiunii transversale de la poziția de echilibru. Masa elementului considerat este $\boldsymbol{m=\rho S\Delta y}$, iar accelerația $a=\partial^2\xi/\partial t^2$.

Introducând aceste expresii în ecuația (4) se obține:

$$\begin{gathered}\rho\, S\Delta y\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-ES\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\cdot\Delta y=0\\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}-\frac{1}{E/\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0\end{gathered} \tag{6}$$

Aceasta este ecuația diferențială de propagare a undelor longitudinale într-o bară elastică. Se observă că $\boldsymbol{E/\rho}$ are dimensiunile pătratului unei viteze deci:

$$v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{7}$$

unde ***v*** este viteza de propagare a undei longitudinale în bara elastică. Soluția acestei ecuații se poate scrie sub forma:

$$\xi_1=A\sin(\omega t-ky) \tag{8}$$

unde $\boldsymbol{A}$ este amplitudinea undei, $\omega = \boldsymbol{2\pi / T}$ - pulsația, $\boldsymbol{T}$ - perioada, iar $\boldsymbol{k = 2\pi / \lambda}$ **-** numărul de undă.

Ecuația unde reflectate se se poate scrie sub forma:

$$\xi_2 = A\sin(\omega t + ky + \varphi) \tag{9}$$

(s-a considerat aici că amplitudinea undei reflecate este egală cu aceea a undei incidente, ceea ce se realizează în condițiile în care la capete nu sunt pierderi de energie). Prin $\boldsymbol{\varphi}$ s-a notat defazajul care apare datorită reflexiei. Acest defazaj este $\pi/2$ în condițiile în care bara este fixată la capete şi este zero atunci când ea este liberă.

În orice punct al barei, starea de oscilație a particulelor mediului este determinată de efectul undei reflectată şi a celei incidente:

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_1 + \xi_2 = A[\sin(\omega t - ky) + \sin(\omega t + ky + \varphi)] = \\
&= A\left\{2\sin\frac{(\omega t - ky) + (\omega t + ky + \varphi)}{2}\cos\frac{(\omega t - ky) - (\omega t + ky + \varphi)}{2}\right\} = \\
&= 2A\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\cdot\left(ky - \frac{\varphi}{2}\right) = \\
&= 2A\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(ky - \frac{\varphi}{2}\right) = B\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

unde:

$$B = 2A\cos\left(ky - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{11}$$

este amplitudinea undei rezultante.

Se constată că amplitudinea undei rezultante este o funcție periodică de $\boldsymbol{y}$**,** adică de poziția în lungul barei, variind între $\boldsymbol{0}$ şi $\boldsymbol{2A}$. Pozițiile de maxim şi de minim ale amplitudinii sunt independente de timp, motiv pentru care unda rezultantă pare a fi fixă în spațiu şi se numeşte ***undă staționară***.

Pozițiile pentru care amplitudinea este zero poartă numele de ***noduri***. În bara de secțiune transversală ***S,*** ele corespund unor plane numite ***plane nodale***. Între acestea amplitudinea variază, maximul amplitudinii (***2A***) realizându-se exact la mijlocul dintre două noduri vecine. Pozițiile caracterizate de un maxim de amplitudine poartă numele de ***ventre***.

Pentru o bară liberă la ambele capete $\boldsymbol{\varphi = 0}$ şi ca urmare:

$$B = 2A\cos ky \tag{12}$$

În noduri $\boldsymbol{B = 0}$ ceea ce se realizează pentru ***cos ky = 0***, deci:

$$ky = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ \ n = 0,1,2,3 \tag{13}$$

Ca urmare, poziția nodurilor se poate găsi din relația:

$$y_{\text{nod}} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \tag{14}$$

Primul nod ($\boldsymbol{n = 0}$) se va găsi la o distanță $\boldsymbol{\lambda/4}$ de capătul barei (bara fiind liberă la ambele capete, situația se prezintă la fel pentru cele două margini).

Maximul amplitudinii, $\boldsymbol{B = 2A}$, se realizează pentru ***cos ky =1***, deci:

$$ky = n\pi, \quad n = 0,1,... \tag{15}$$

de unde:

$$y_{\text{ventru}} = 2n\frac{\lambda}{4} \tag{.16}$$

Primul ventru, $\boldsymbol{n = 0}$, se obține la $\boldsymbol{y = 0}$. Deci, la capetele barei se vor forma ventre. Distanța dintre două ventre vecine, respectiv dintre două noduri vecine este $\boldsymbol{\lambda/2}$. Se poate constată că, pentru a se forma unde staționare în bara cu capetele libere (loc în care, în mod obligatoriu se formează ventre), este necesar ca lungimea barei să fie un multiplu de $\boldsymbol{\lambda/2}$. Deci, condiția de formare a undelor staționare se scrie sub forma:

$$\boldsymbol{l = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{v}{2u} \qquad n = 1,\ 2\ 3,\ ...} \tag{17}$$

de unde:

$$v = \frac{2lf}{n} \tag{18}$$

Introducând această expresie a vitezei în (7) se obține, pentru modulul Young:

$$E = \frac{4l^2f^2}{n^2}\rho \tag{19}$$

Pentru o bară de lungime şi densitate cunoscute se poate determina ***E*** măsurând *f* pentru diferite valori ale lui ***n.***

Descrierea dispozitivului experimental.

Dispozitivul experimental constă dintr-o bară metalică (din Cu), care are sudate la capete două plăcuțe din fier. Să presupunem că, inițial, bara este fixată la mijloc (Fig. 2). În imediata apropiere a unuia din capetele libere ale barei este fixat un electromagnet alimentat de un generator de curent alternativ de frecvență variabilă.

Acționând asupra capătului barei, forța electromagnetică imprimă plăcuței o mişcare oscilatorie, care se propagă în lungul barei. În condițiile formării de unde staționare, celălalt capăt al barei oscilează cu amplitudinea maximă, inducând în electromagnetul ce se află în imediata apropiere, un curent electric alternativ a cărui amplitudine se observă la osciloscop. Se reglează frecvența generatorului până se obține amplitudinea maximă la osciloscop. În acest caz este realizată condiția de rezonanță, bara oscilând pe frecvența fundamentală ($n = 1$, $l = \lambda/2$).

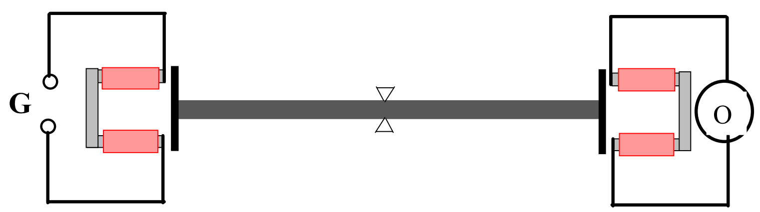

Fig. 2

Modul de lucru.

❶ se măsoară lungimea barei metalice;

❷ se fixează bara exact la mijloc;

❸ se reglează frecvența generatorului până se observă primul maxim ($n = 1$) al semnalului pe osciloscop (f_1); se trece valoare găsită în tabelul de date;

❹ se caută să se obțină unde staționare pe armonicele impare (n = 3, 5, …) pentru aceeaşi poziție de prindere a barei;

❺ se fixează cei doi suporți de prindere a barei la distanța *l/4* de cele două capete; reglându-se frecvența oscilațiilor se observă, pe osciloscop, apariția unui semnal maxim (la frecvența egală cu dublul frecvenței fundamentale, $\boldsymbol{n} = 2$)

❻ se identifică poziția minimelor, în cazul formării de unde staționare cu frecvența $\boldsymbol{4f_1}$ fixându-se bara, în două noduri de oscilație.

❼ se completează tabelul de date experimentale.

Tabelul nr.1

Determinarea modulului Young printr-o metodă dinamică

Nr. det	l (cm)	n	ν (Hz)	E (N/m^2)
1.				
2.				
…				

❽ se efectuează calculul erorilor.

➢ **Notă.** Cum s-ar putea calcula factorul de calitate al unui oscilator de acest tip folosind indicațiile osciloscopului?