DETERMINAREA CONSTANTEI ELASTICE A UNUI RESORT PRINTR-O METODĂ DINAMICĂ

Scopul lucrării

În această lucrare se studiază mişcarea efectuată de un sistem oscilant (un pendul elastic). Se determină constanta elastică a resortului. Se efectuează calculul erorilor de măsură folosind metoda diferenţialei logaritmice şi metoda celor mai mici pătrate

Principiul fizic al metodei

După cum este cunoscut, prin ***pendul elastic*** se înţelege un sistem fizic capabil să excute oscilaţii armonice sub acţiunea unei forţe elastice. Cel mai simplu pendul elastic se realizează dintr-un resort, ***P,*** care are capătul superior fixat, iar de celălalt se atârnă un corp greu, ***M*** (Fig. 1). Forţa elastică ia naştere în resort o dată cu deformarea acestuia; resortul şi corpul ***M*** alcătuiesc sistemul fizic capabil să oscileze. Înainte de a suspenda corpul ***M***, capătul liber al resortului se află în punctul ***O*** (Fig. 1a).

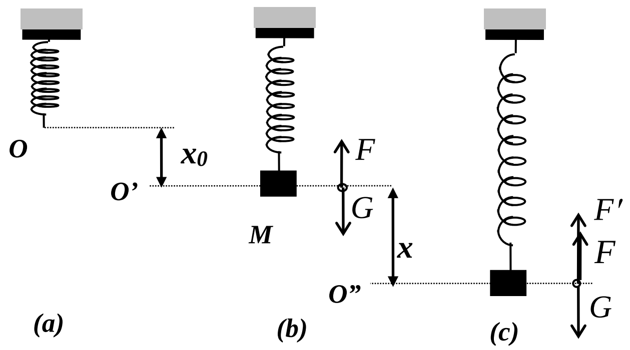

Fig.1

Sub acţiunea forţei de greutate ***G = mg***, resortul se alungeşte, capătul său deplasându-se în punctul ***O***' aflat la distanţa x_0 de punctul ***C***. Datorită deformării elastice, în resort ia naştere forţa $F = -kx_0$, unde ***k*** este constanta elastică a resortului. Deoarece toate forţele acţionează după aceeaşi direcţie, relaţia dintre ele se poate scrie sub formă scalară.

În noua poziţie de echilibru, între cele două forţe există relaţia:

$$F - G = 0 \tag{1}$$

Acţionând cu o forţă suplimentară în jos, astfel încât capătul resortului să se deplaseze în punctul ***O"***, aflat la distanta ***x*** de punctul ***O'***, în resort va lua naştere o forţă elastică suplimentară $F' = -kx$. Înlăturând forţa care a produs noua deformare a resortului, asupra corpului de masă ***M*** vor acţiona trei forţe (Fig. 1c) astfel încât ecuaţia de mişcare se poate scrie:

$$ma = F + F' - G \tag{2}$$

Ţinând seama de relaţia (1) ecuaţia diferenţială de mişcare a corpului se scrie sub forma:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{3}$$

Relaţia (3) reprezintă ecuaţia diferenţială a mişcării oscilatorului armonic care execută oscilaţii neamortizate; pulsaţia proprie este dată de relaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

Ecuaţia mişcării oscilatorii este de forma:

$$x = A\cos(\omega\, t + \varphi) \tag{5}$$

unde $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{\varphi}$ sunt două constante (amplitudinea şi faza) care se determină din condiţiile iniţiale, specificate prin poziţia $\boldsymbol{x_0}$ şi prin viteza $\boldsymbol{v}_0$, ambele mărimi specificate la momentul $\boldsymbol{t} = 0$.

Perioada mişcării oscilatorii (intervalul de timp în care se efectuează o oscilaţie completă) este dată de relaţia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ adică } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6}$$

Deoarece este greu de cronometrat doar o singură perioadă, se va cronometra timpul *t* în care se vor efectua *n* oscilaţii complete. Astfel, folosind relaţia (6), se poate determina constanta elastică a resortului din următoarea relaţie:

$$k = \frac{4\pi^2 n^2 m}{t^2} \tag{7}$$

Dispozitivul experimental şi modul de lucru

Dispozitivul este alcătuit dintr-un suport vertical de care se prinde un resort de care pot fi suspendate corpuri de diferite mase. Se vor folosi 3 corpuri. Mai intâi se vor cronometa oscilaţiile efectuate de un singur corp, apoi oscilaţiile efectuate de două corpuri ataşate simultan. În final, se vor folosi toate cele trei corpuri simultan. O determinare înseamnă cronometrarea timpului în care se efectuează *n* (50 sau mai multe) oscilaţii complete.

Determinarea constantei k

- folosind balanţa electronică, se cântăresc cele trei corpuri;
- folosind cronometrul, se efectuează zece determinări pentru corpul cu masa cea mai mare, completându-se tabelul de mai jos;
- folosind două corpuri simultan, se efectuează alte zece determinări;
- în final se ataşează toate corpurile, efectuând ultimele zece determinări;
- se completează Tabelul nr. 1 şi se calculează constanta elastică cu ajutorul relaţiei:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} m = \frac{4\pi^2}{t^2} n^2 m \qquad (7)$$

Tabelul nr.1

Determinarea constantei elastice a resortului

Nr.det	*m* / g	*n*	*t* / s	*k* / N/m	*Δk* / N/m
1.					
2.					
...					
30					

Metoda diferenţialei logaritmice

Logaritmând, diferenţiind şi trecând la diferenţe finite relaţia (7), se poate obţine următoarea relaţie pentru evaluarea erorilor introduse de instrumentele de măsură:

$$\Delta k = k \times (2\frac{\Delta t}{t} + 2\frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta m}{m}) \qquad (8),$$

unde Δt = 0,1 s (dat de timpul de reacţie a celui care cronometrează), Δn = 1 (presupunem că la numărătoare se greşeşte cu maxim o oscilaţie), iar Δm = 0,05 g (precizia balanţei este de 0,1 g).

Folosind relaţia (8) se completează ultima coloană a tabelului nr. 1.

Se calculează apoi $\bar{k}$ şi $\overline{\Delta k}$.

Rezultatul final se scrie $k = \bar{k} \pm \overline{\Delta k}$ N/m.

Metoda celor mai mici pătrate şi graficul t^2 = f(m)

Rearanjând relaţia (7), se poate obţine următoarea relaţie pentru a evalua erorile de măsură folosind metoda celor mai mici pătrate:

$$t^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{k} \times m \tag{9}$$

Se face media aritmetică a celor zece valori ale timpului obţinute pentru corpul cu masa cea mai mare. Valoarea rezultată se trece în tabelul nr. 2. Apoi se face media aritmetică a celor zece valori obţinute pentru ansamblul format din două corpuri. În final, se repetă procedeul pentru cazul în care se folosesc toate cele trei corpuri.

Se competează tabelul nr. 2.

Tabelul nr.2

Determinarea constantei elastice a resortului folosind metoda delor mai mici pătrate

Nr.det	m / g	t / s	m^2 / g^2	t^2 / s^2	$m \times t^2$ / g × s^2
1.					
2.					
3					

Constanta elastică se obţine apoi folosind următoarea relaţie:

$$k = 4\pi^2 n^2 \frac{\overline{m^2} - \overline{m}^2}{\overline{m \times t^2} - \overline{m} \times \overline{t^2}} \tag{10}$$

Se observă dacă această valoarea se situează în intervalul $\overline{k} \pm \overline{\Delta k}$.

Folosind datele din tabelul nr. 2 se trasează pe hârtie milimetrică graficul t^2 = f(m). Se duce dreapta printre cele trei puncte (dreapta trebuie să treacă prin origine). Din panta dreptei se determină k. Valoarea găsită se compară cu cea obţinută prin metoda celor mai mici pătrate.